تقدیم به

خانواده‌های محترمِ:

رفعتی، شریف خطیبی، کشوری و سایر بستگان

محمد حسین صابری

«عزیزترین...»

سپهر متولی

مقدمهٔ ناشر

یادم است از بچگی همه‌اش به ما می‌گفتند «حاسبوا انفسکم قبل اَن تُحاسبوا» و به همین علت اهمیت درس حساب و به ویژه مقولهٔ حساب و کتاب، برایمان خیلی زیاد شد. شما الآن یک «حسابان ۱» دارید و یک «حسابان ۲» و ما آن موقع‌ها یک «حسابان» داشتیم و یک «حساب دیفرانسیل و انتگرال» و این دومی اسمش خیلی دهن پرکن بود و می‌شد کلی پزش را داد. اما راستش را بخواهید به‌جز مبحث انتگرالش که از «حسابان ۲» حذف شده مطالبش همین‌ها بود که شما می‌خوانید. هم آن‌وقت‌ها و هم الآن، برای بچه‌های رشتهٔ ریاضی فیزیک، شاید مهم‌ترین درس برای خوب‌خواندن و یادگرفتن، همین درس حسابان باشد. پایهٔ تمام درس‌های ریاضی دانشگاه مثلاً ریاضی ۱ و ۲ و معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی و انواع دیگر ریاضی که قرار است سال‌های بعد در دانشگاه بخوانید، همین مطالب کتاب حسابانتان است و حتماً برای همین است که ضریب این درس در کنکور ریاضی فیزیک شده ۴.

یادم هست از همان سال‌های اولی که بچه‌ها وارد دانشگاه می‌شدند یکی از شوخی‌های خیلی رایجشان این بود که «بالأخره نفهمیدیم این حساب دیفرانسیل و انتگرال به چه دردی می‌خورده؟!»

فکر می‌کنم همین شوخی در زمان شما تبدیل شود به این که «بالأخره نفهمیدیم حسابان به چه دردی می‌خوره؟!». راستش را بخواهید حسابان و همین‌طور خیلی درس‌های دیگر خودشان به طور مستقیم در زندگی به هیچ دردی نمی‌خورند اما به طور غیرمستقیم در زندگی شما، ما و خیلی‌های دیگر فایده دارند. همین موضوع «حاسبوا» که اول مقدمه نوشتم اگر چه ممکن است ساده به نظر بیاید ولی خیلی پیچیده و دشوار است. حساب و کتاب قبل از هر چیز شناخت و فهمیدن درست لازم دارد. فهمیدن و دیدن دقیق همه‌چیز، کارهایی که می‌کنیم، فکرهایی که از سرمان می‌گذرد، دلایلی که برای کارهایمان داریم و ... . درس‌خواندن قرار است باعث شود تا نوع و کیفیت نگاهمان به زندگی تغییر کند، باعث شود که دقیق‌تر شویم، باعث شود که در مورد همه‌چیز خوب حساب و کتاب کنیم و ... . می‌دانم هر چه‌قدر هم که از این حرف‌ها بزنم باز هم شما به امتحان و نمره‌ای که در امتحان می‌گیرید فکر می‌کنید یا به درصد و رتبه‌ای که در کنکور به دست می‌آورید. سال‌های بعد که در مورد این روزها فکر می‌کنید و به یادشان می‌آورید می‌بینید که همهٔ این‌ها گذشته و چیزی که برایتان مانده است نه نمره است نه رتبه؛ تجربه‌ای است که از زندگی در این دوران، حس‌هایی که داشته‌اید و چیزهایی که یاد گرفته‌اید. شاید نوشتن چنین چیزی در مقدمهٔ کتابی است که در نامش آمده «ماجرای بیست» عجیب باشد، ولی هیچ‌کدام از این‌ها با هم منافاتی ندارند، هم زندگی کنید، هم یاد بگیرید، هم خوب باشید و هم ۲۰ بگیرید.

خوش باشید.

مقدمهٔ مؤلف

کنکوری هستی؟ بزرگ شدیا!!

دوستایِ بزرگم سلام. می‌خوام یکم دربارهٔ امسال باهاتون صحبت کنم *(خووب گوش کنید)*.

امسال واسهٔ شماها قراره که امتحانِ نهاییِ خرداد، تأثیر مستقیم ۶۰٪ روی کنکور داشته باشه و خُب! خداییش درصد زیادیه (تکرار می‌کنم، تأثیر مستقیم ۶۰٪ ای) پس واسهٔ این‌که بتونین توی یه دانشگاه خوب درس بخونید، هم باید تستی بخونید هم تشریحی. به قوی و ضعیف بودن دانش‌آموز هم ربطی نداره، ما امسال توی مدارس خفن هم از بچه‌ها امتحان تشریحی می‌گیریم.

این کتاب رو به پیشنهاد خیلی‌سبز عزیز برای شما و موفقیت شما توی امتحان نهایی نوشتم. ایشالا که تونسته باشم کمکتون کرده باشم.

کتاب ماجرای بیست حسابان دوازدهم اینارو داره:

درس‌نامه: سعی کردم خیلی ساده، روان و کاربردی درس را آموزش بدیم. مطالب اضافه در این کتاب نمی‌بینید اما هر چیزی که برای کسب ۲۰ نهایی لازمه رو دارید. چینش درس‌ها کاملاً مثل کتاب درسیه، البته بیشتر جاها برای این‌که مطالب، طولانی نشه و حوصله‌تون سر نره، درس به چند بخش تقسیم شده و سؤال‌های هر قسمت رو جداگونه آوردیم.

سؤال‌های امتحانی: همه مثال‌ها و تمرین‌های کتاب و کار در کلاس‌ها، فعالیت‌ها و همهٔ سؤال‌های نهایی خرداد ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳ توی این کتاب موجوده و به قول معروف پوشش کامل کتاب درسی و امتحان‌های نهایی یه جوری رعایت شده که بعد خوندن «ماجرای بیست» دیگه هیچ نگرانی‌ای ندارید که چیزی جا افتاده باشه.

سؤال‌هایی که کنار آن‌ها علامت است، سطح دشوارتری نسبت به بقیهٔ سؤال‌ها داره و شما رو برای سؤال‌های سخت نهایی آماده می‌کنه.

آزمون‌های انتهایی هر فصل: بعد از تمام شدن هر فصل، خوب است خودتان را با یک آزمون نسبتاً دشوار محک بزنید. اگر در حل سؤال‌ها اشکالات زیادی داشتید، بدانید که باید دوباره به درس‌نامه و سؤال‌های امتحانی فلش‌بک بزنید.

پاسخ‌های تشریحی: بعد از حل سؤال‌ها، حتما پاسخ‌ها را تحلیل کنید.

آزمون‌های پایانی کتاب: در انتهای کتاب، دو امتحان ترم اول داریم و چهارتا امتحان ترم دوم. حتماً قبل امتحان نهایی این سؤال‌ها رو حل کنید و به بارم‌بندی اون‌ها هم توجه کنید که بدونید باید چجوری توی امتحان جواب بدی.

کلام آخر

تشکر ویژه از اساتید عزیزم، مهندس مجید رفعتی (آقایِ حسابان)، مهندس محمد کشوری، مهندس علی‌رضا شریف خطیبی (پدرِ معنوی من)، دکتر کامبیز مقدم‌فر و استاد علی مؤمن‌زاده.

تشکر خیلی صمیمانه از همسر مهربانم که واقعاً در مدت تألیف من رو تحمل کرد و هم‌چنین همهٔ دانش‌آموزها و مدارسی که نتونستم اون موقع در خدمتشون باشم

در نهایت هر پیشنهاد و انتقادی راجع به کتاب رو حتماً به ما بگید.

راه ارتباطی: @mathmots

سپهر متولی و محمدحسین صابری

فهرست

فصل ۱: تابع

بخش ۱: تبدیل نمودار توابع

رسم خیلی از تابع‌ها آن هم در سطح دبیرستان اصلاً سخت نیست؛ یعنی اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم، با یک سری تبدیل‌ها می‌توانیم نمودار تابع‌های زیادی را رسم کنیم.

انتقال‌های عمودی و افقی

پارسال و پیرارسال (*دو سال پیش*) با یک سری تبدیل آشنا شدید و چون پیش‌نیاز درس‌های جدیدند، بد نیست یادی از آن‌ها کنیم. (*البته کتاب دوازدهم هم بهوشون اشاره کرده.*)

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم:

الف) $y=f(x)\pm k$ این نمودارها را به این شکل رسم می‌کنیم: $(k>۰)$

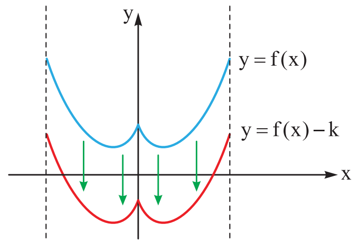
۱) $f(x)+k \Rightarrow$ $f(x)$ را k واحد بالا می‌بریم.

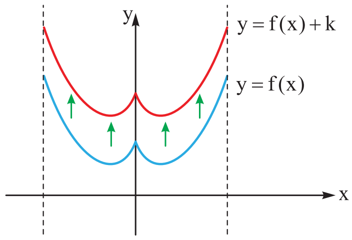
۲) $f(x)-k \Rightarrow$ $f(x)$ را k واحد پایین می‌بریم.

به این انتقال، **انتقال عمودی** می‌گوییم.

مثلاً $f(x)+۲$ ، دو واحد نسبت به $f(x)$ به بالا می‌رود و $f(x)-۱$، یک واحد نسبت به $f(x)$ به پایین می‌رود.

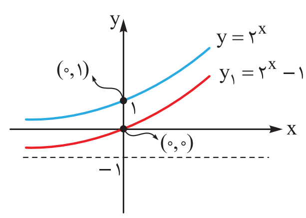
به نمودارهای زیر توجه کنید: $(k>۰)$

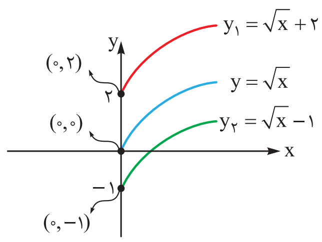




دامنه و برد $y=f(x)+k$: همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، دامنهٔ تابع تغییری نمی‌کند. (*انتقال عمودیه*) ولی برد تابع، k واحد جابه‌جا می‌شود. پس اگر $R_{f(x)}=[a,b]$ (برد f) باشد، آن‌گاه $R_{f(x)+k}=[a+k,b+k]$ است.

چند مثال از انتقال عمودی توابع معروف ببینید:





دامنهٔ $y=۲^x$، $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

دامنهٔ $y_۱$، $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $(-۱,+\infty)$ است.

دامنه و برد تابع $y=\sqrt{x}$، بازهٔ $[۰,+\infty)$ است.

دامنهٔ $y_۱$، بازهٔ $[۰,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[۲,+\infty)$ است.

دامنهٔ $y_۲$ بازهٔ $[۰,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[-۱,+\infty)$ است.

تذکر: برای این‌که در انتقال، نمودار دقیق‌تری به دست آوریم، مختصات یک یا چند نقطه را در نمودار انتقال‌یافته مشخص می‌کنیم و سپس نمودار را براساس آن‌ها رسم می‌کنیم.

مثلاً برای رسم نمودار $y_۱=\sqrt{x}+۲$ با استفاده از نمودار $y=\sqrt{x}$، می‌گوییم نقطهٔ $(۰,۰)$ روی تابع $y=\sqrt{x}$ قرار دارد و اگر دو واحد به بالا انتقال پیدا کند، x آن عوض نشده و همان صفر است، ولی y آن به اضافهٔ دو خواهد شد و نقطهٔ انتقال‌یافته $(۰,۲)$ خواهد بود.

ب) $y=f(x\pm k)$ این نمودارها را به این شکل رسم می‌کنیم: $(k>۰)$

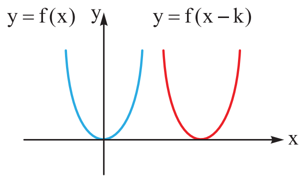
۱) $f(x+k) \Rightarrow$ $f(x)$ را k واحد چپ می‌بریم

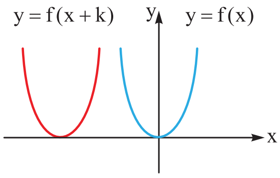
۲) $f(x-k) \Rightarrow$ $f(x)$ را k واحد راست می‌بریم

به این انتقال، **انتقال افقی** می‌گوییم.

مثلاً $f(x-۲)$، دو واحد نسبت به $f(x)$ به سمت راست می‌رود و $f(x+۱)$، یک واحد نسبت به $f(x)$ به سمت چپ می‌رود (*برعکسه*).

به نمودارهای زیر توجه کنید:

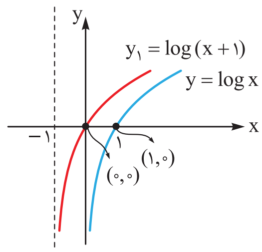


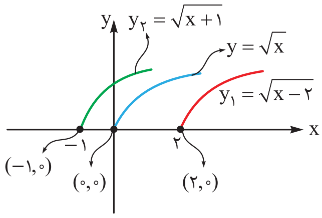


دامنه و برد $y=f(x+k)$: همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، برد تابع تغییری نمی‌کند *(انتقال افقیه دیگه)* ولی دامنهٔ تابع، k واحد جابه‌جا می‌شود.

پس اگر $D_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $D_{f(x+k)}=[a-k,b-k]$ است. *(چرا این‌جوری نگاه می‌کنید؟؟ گفتم که برعکسه)*

چند مثال از انتقال افقی توابع معروف ببینید:





دامنهٔ $y=\log x$، بازهٔ $(0,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

دامنهٔ y_1، بازهٔ $(-1,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

دامنه و برد $y=\sqrt{x}$، بازهٔ $[0,+\infty)$ است.

دامنهٔ y_1، بازهٔ $[2,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[0,+\infty)$ است.

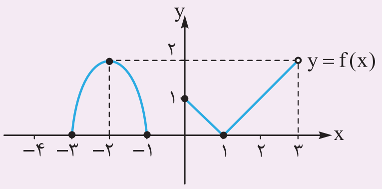
دامنهٔ y_2، بازهٔ $[-1,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[0,+\infty)$ است.

توجه: خیلی وقت‌ها ممکن است در یک تابع، هم تغییرات افقی و هم عمودی داشته باشیم، مثلاً:

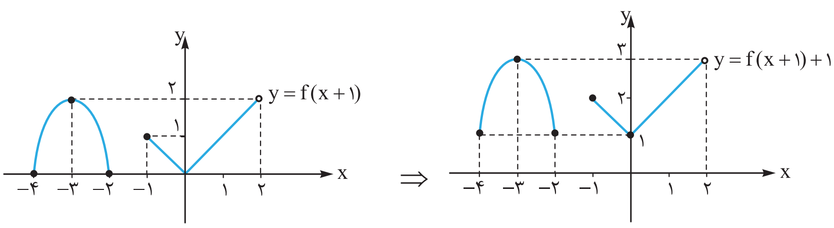
$$y=f(x+\underbrace{\square}_{\text{تغییر افقی}})+\Delta \rightarrow \text{تغییر عمودی}$$

برای رسم این تابع‌ها از روی $y=f(x)$ اول تغییر افقی $(\square)$ و بعد تغییر عمودی (Δ) را اعمال می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. به کمک انتقال، نمودار تابع $y=f(x+1)+1$ را رسم کنید.

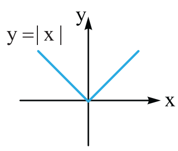


پاسخ: برای رسم $f(x+1)$، نمودار $f(x)$ را یک واحد به چپ می‌بریم، سپس نمودار $f(x+1)$ را یک واحد بالا می‌بریم تا نمودار تابع $y=f(x+1)+1$ به دست آید. یعنی:

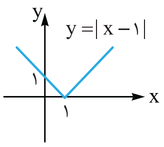


مثال: نمودار تابع $y=|x-1|-2$ را با استفاده از انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

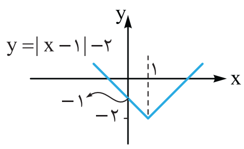
پاسخ: ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم.



در مرحلهٔ بعدی نمودار $y=|x-1|$ را با انتقال افقی یک واحد به سمت راست تابع اصلی $(y=|x|)$ رسم می‌کنیم.



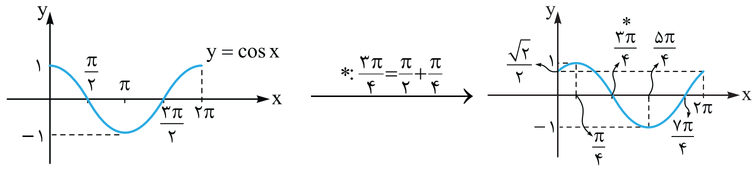
در مرحلهٔ آخر، نمودار مرحلهٔ قبلی را با انتقال عمودی دو واحد به پایین منتقل کرده و رسم می‌کنیم:



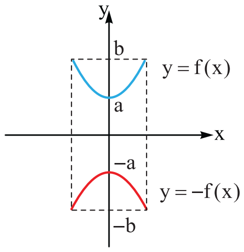
با توجه به نمودار مشخص هست که دامنهٔ نمودار انتقال‌یافته $\mathbb{R}$ و برد آن هم $[-2,+\infty)$ می‌باشد.

مثال: نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y=\cos x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

پاسخ: ابتدا نمودار $y=\cos x$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم می‌کنیم و سپس به اندازهٔ $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال افقی می‌دهیم.



از مطالبی که در سال‌های قبل یاد گرفتید، دو تبدیل بسیار مهم و پرکاربرد $-f(x)$ و $f(-x)$ باقی‌مانده است. این دو را هم بگوییم و برویم سراغ تبدیل‌های جدید.



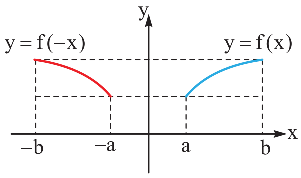
رسم $-f(x)$ و $f(-x)$ از روی $f(x)$

نمودار $y=f(x)$ را داریم:

الف) $y=-f(x)$ برای رسم این تابع از روی $f(x)$، نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

واضح است که دامنهٔ f و $-f$ با هم برابرند ولی محدودهٔ برد به صورت زیر تغییر می‌کند.

◀ اگر $R_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $R_{-f(x)}=[-b,-a]$ است. *(نمودار رو ببینید.)*



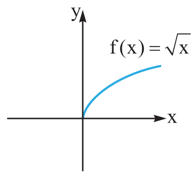
ب) $y=f(-x)$ برای رسم این تابع از روی $f(x)$، این بار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

همان‌طور که از روی نمودار می‌بینید برد $f(x)$ و $f(-x)$ با هم برابرند ولی محدودهٔ دامنه به صورت زیر تغییر می‌کند.

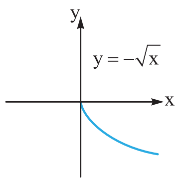
◀ اگر $D_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $D_{f(-x)}=[-b,-a]$ است.

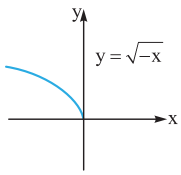
مثال: از روی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار تابع‌های $-f(x)$ و $f(-x)$ و $-f(-x)$ را رسم کنید.

پاسخ: می‌دانیم که نمودار $\sqrt{x}$ به صورت مقابل است:

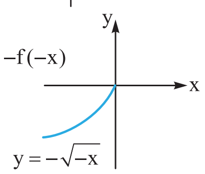


برای رسم $-f(x)$ و $f(-x)$، نمودار $f(x)$ را به ترتیب نسبت به محور xها و محور yها قرینه می‌کنیم. ببینید:



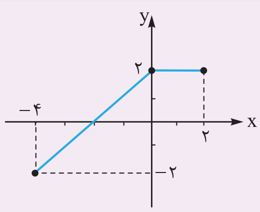


برای رسم $-f(-x)$، نمودار $f(x)$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم $(f(-x))$، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم $(-f(-x))$:

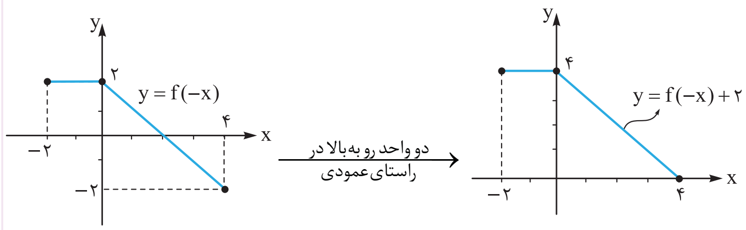


نکته: برای رسم نمودار $-f(-x)$ از روی نمودار $f(x)$، کافی است $f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم.

مثال: با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $y=f(-x)+2$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



پاسخ: ابتدا نمودار $y=f(-x)$ را رسم می‌کنیم که می‌بایست نمودار اصلی $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم. سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در راستای عمودی بالا می‌بریم:



با توجه به شکل نهایی مشخص است که دامنه برابر با بازهٔ $[-2,4]$ و برد برابر با بازهٔ $[0,4]$ می‌باشد.

انبساط و انقباض عمودی

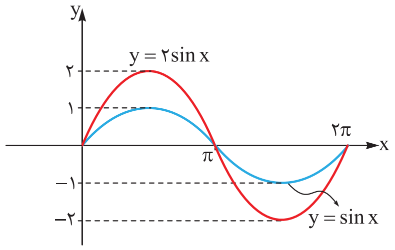
اگر نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم:

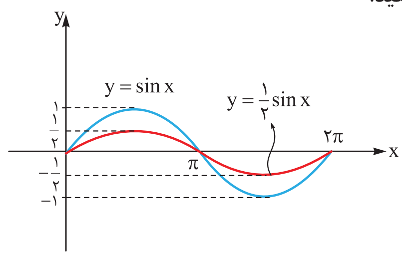
$\boxed{y=kf(x)}$ برای رسم این تابع از روی $y=f(x)$، عرضِ تابع f را در k ضرب می‌کنیم (*دامنه ثابته*) و آن را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

① $k>1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور yها با ضریب k کشیده می‌شود (انبساط عمودی)

② $0<k<1 \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور yها با ضریب k فشرده می‌شود (انقباض عمودی)

به مثال زیر توجه کنید:





نگاه کنید! $2\sin x$ *نسبت به* $\sin x$ *کشیده‌تره ولی* $\frac{1}{2}\sin x$ *نسبت به* $\sin x$ *فشرده‌تره.*

دامنه و برد تابع $y=kf(x)$: همان‌طور که می‌بینید، دامنهٔ تابع $kf(x)$ تغییر نمی‌کند ولی برد تابع، k برابر می‌شود.

پس اگر $R_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $R_{kf(x)}=[ak,bk]$ است. $(k>0)$

آقا اجازه! اگر بخواهیم از روی نمودار $f(x)$، مثلاً نمودار $-2f(x)$ را رسم کنیم چی؟

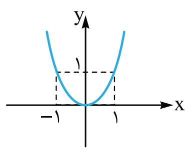
خب، اول $2f(x)$ را رسم می‌کنیم (نمودار f کشیده‌تر می‌شود) و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم یا این‌که مستقیم yها رو در -2 ضرب می‌کنیم.

مثال: به کمک نمودار $y=x^2$، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

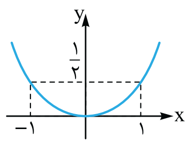
الف) $y=\frac{1}{2}x^2$ ب) $y=-2x^2$

پاسخ:

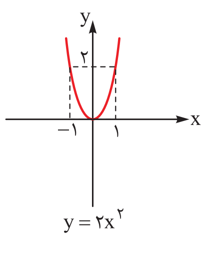
می‌دانیم نمودار $y=x^2$ به صورت مقابل است:

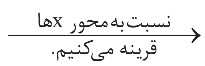


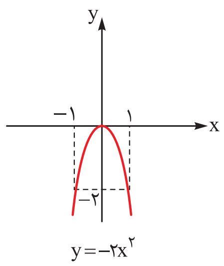
الف برای رسم $y=\frac{1}{2}x^2$ باید نمودار x^2، در راستای محور yها فشرده‌تر شود *(دَهَن نمودار بازتر میشه.)*



ب برای رسم $y=-2x^2$، ابتدا $y=2x^2$ را از روی x^2 رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ببینید:







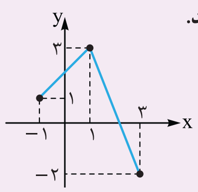
نکته: برای رسم نمودارهای $y=af(x)+b$، از روی $y=f(x)$ کافی است yهای همهٔ نقاط را ابتدا در a ضرب کرده (یعنی با ضریب a انبساط یا انقباض عمودی ایجاد کنیم)، سپس کل نمودار به دست آمده را b واحد انتقال عمودی بدهیم.

$$y=\underset{\downarrow \; 1}{a}f(x)+\underset{\downarrow \; 2}{b}$$

(ترتیش خیلی مهمه!)

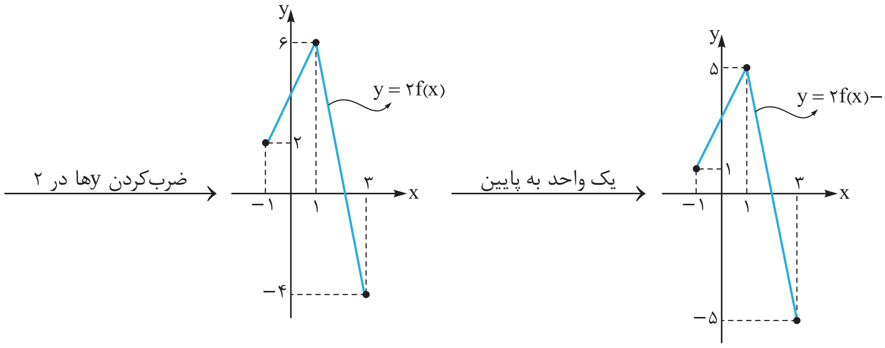
مثال: در شکل مقابل نمودار $f(x)$ رسم شده است، از روی آن نمودارهای زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y=2f(x)-1$ ب) $y=2-f(x)$ پ) $y=1-\frac{f(x)}{3}$



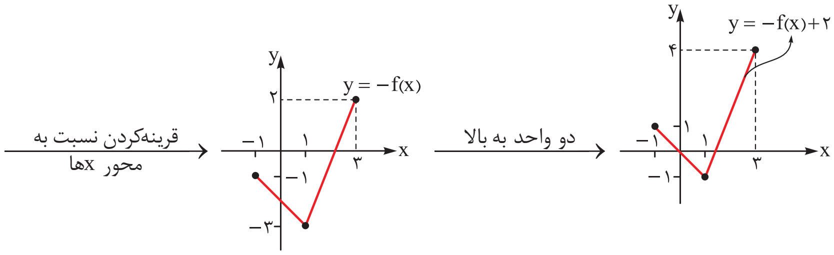
پاسخ: از روی نمودار مشخص است که $D_f=[-۱,۳]$ و $R_f=[-۲,۳]$

الف کافی است نمودار را ابتدا با ضریب ۲ انبساط عمودی دهیم و سپس ۱ واحد با انتقال عمودی پایین بیاوریم.



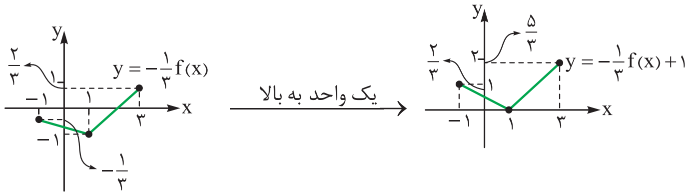
$$\Rightarrow \begin{cases} D=[-۱,۳] \\ R=[-۵,۵] \end{cases}$$

ب برای رسم $y=-f(x)+۲$، ابتدا نمودار را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس دو واحد در راستای yها نمودار را به بالا می‌بریم.



$$\Rightarrow \begin{cases} D=[-۱,۳] \\ R=[-۱,۴] \end{cases}$$

پ برای رسم $-\frac{۱}{۳}f(x)+۱$، ابتدا با ضریب $\frac{۱}{۳}$ در راستای عمودی منقبض کرده و نسبت به محور xها قرینه کرده (این دو مرحله را می‌توان یک‌جا انجام داد با ضرب yها در $(-\frac{۱}{۳})$) و یک واحد بالا می‌بریم.



$$\Rightarrow \begin{cases} D=[-۱,۳] \\ R=[۰,\frac{۵}{۳}] \end{cases}$$

انبساط و انقباض افقی

اگر نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم:

$y=kf(x)$ برای رسم این تابع از روی $y=f(x)$، طولِ نمودار f را در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌کنیم *(عرض ثابته)* و آن را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

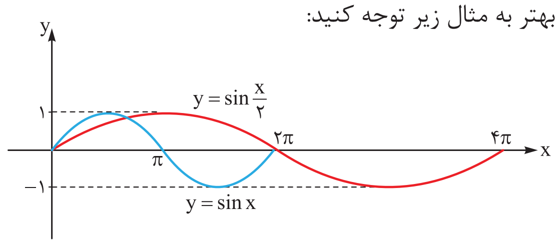
① $k>۱ \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{k}$ فشرده می‌شود (انقباض افقی)

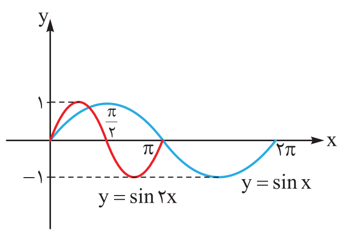
② $۰<k<۱ \Rightarrow$ نمودار $f(x)$ در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{k}$ کشیده می‌شود (انبساط افقی)

مثلاً برای رسم نمودار $f(۲x)$ از روی $f(x)$، تمامی xهای تابع $f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم (یا همان بر ۲ تقسیم می‌کنیم) بدون این‌که yشان عوض شود. مثلاً نقطهٔ $A(۴,-۱)$ و $B(-۳,۰)$ در $f(x)$، به نقاط $A'(\frac{۴}{۲},-۱)$ و $B'(-\frac{۳}{۲},۰)$ در $f(۲x)$ تبدیل می‌شوند.

تذکر: توجه کنید که وقتی تغییرات روی x است ($f(x+k)$ یا $f(kx)$) برعکس عمل می‌کنیم. مثلاً در $f(x+۱)$، تابع $f(x)$ را یک واحد به چپ می‌بریم (انتقال افقی) و در $f(۲x)$، تابع $f(x)$ را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور xها فشرده می‌کنیم (انقباض افقی).

برای فهم بهتر به مثال زیر توجه کنید:



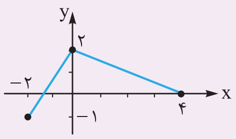


مشاهده می‌کنید نمودار $y=\sin\frac{x}{۲}$ ($k=\frac{۱}{۲}$) از همه کشیده‌تر و نمودار $y=\sin ۲x$ ($k=۲$) از همه فشرده‌تر است. *(گفتم که تغییر روی x برعکسه)*

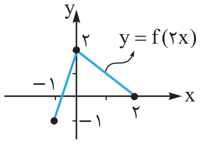
دامنه و برد تابع $y=f(kx)$: همان‌طور که می‌بینید برد تابع $f(kx)$ تغییری نمی‌کند ولی دامنهٔ تابع $f(kx)$ تغییر می‌کند. *(فعلاً k رو مثبت می‌گیریم.)*

پس اگر $D_{f(x)}=[a,b]$، $D_{f(kx)}=[\frac{a}{k},\frac{b}{k}]$ می‌شود.

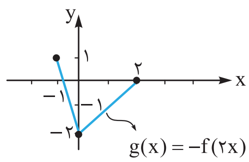
مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-f(۲x)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. *(نهایی دی ۹۷)*



پاسخ: ابتدا نمودار $f(۲x)$ را با نصف‌کردن xهای نمودار رسم می‌کنیم. سپس برای رسم $-f(۲x)$، نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



و



با توجه به نمودار مشخص است که: $D_g=[-۱,۲]$ و $R_g=[-۲,۱]$ می‌باشند.

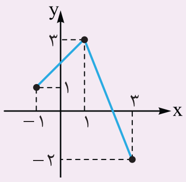
بچه‌ها یک سؤال! اگر بخواهیم از روی نمودار $f(x)$، مثلاً $f(-۲x)$ را رسم کنیم چی؟؟؟ بگذارید خودم جواب بدهم.

مثل حالت‌های قبل، ابتدا $f(۲x)$ را رسم می‌کنیم و سپس $f(۲x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم یا این‌که xها رو مستقیم به ۲− تقسیم می‌کنیم.

نکته: برای رسم $f(ax+b)$ از روی $f(x)$، ابتدا b واحد انتقال افقی می‌دهیم و سپس با ضریب $\frac{۱}{a}$ انقباض یا انبساط افقی می‌دهیم. *(ترتیبش خیلی مهمه!)*

$f(\underset{②}{a}x+\underset{①}{b})$

مثال: در شکل مقابل نمودار $f(x)$ رسم شده است، از روی آن نمودارهای زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید.

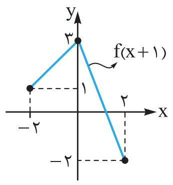


الف) $y=f(۲x+۱)$ ب) $y=f(۲-x)$ پ) $y=f(\frac{۱-x}{۳})$

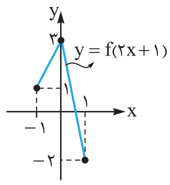
پاسخ: از روی نمودار مشخص است که $D_f=[-۱,۳]$ و $R_f=[-۲,۳]$

الف برای رسم $f(۲x+۱)$، ابتدا نمودار را یک واحد به چپ برده و سپس xها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$\xrightarrow[x\to x+۱]{\text{یک واحد به چپ می‌بریم.}}$



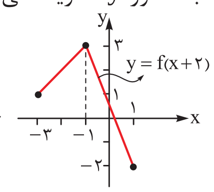
$\xrightarrow[x\to ۲x]{\text{xها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.}}$



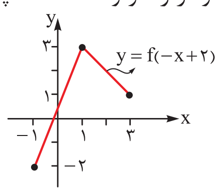
$\Rightarrow \begin{cases} D=[-۱,۱] \\ R=[-۲,۳] \end{cases}$

ب برای رسم $f(-x+۲)$، ابتدا نمودار را دو واحد سمت چپ برده و سپس نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

$\xrightarrow[x\to x+۲]{\text{دو واحد به چپ می‌بریم.}}$



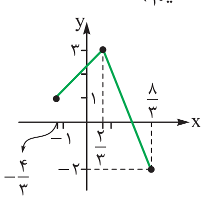
$\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}}$



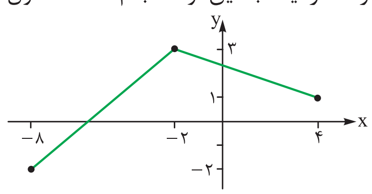
$\Rightarrow \begin{cases} D=[-۱,۳] \\ R=[-۲,۳] \end{cases}$

پ برای رسم $f(\frac{-x+۱}{۳})=f(\frac{-x}{۳}+\frac{۱}{۳})$، ابتدا نمودار را به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ سمت چپ انتقال داده، سپس قرینه نسبت به محور yها و بعد xها را در ۳ ضرب می‌کنیم (می‌توان دو مرحله را یک‌جا این‌گونه انجام داد که طول نقاط را در عدد ۳− ضرب کنیم.)

$\xrightarrow[x\to x+\frac{۱}{۳}]{\text{انتقال } \frac{۱}{۳} \text{ واحد به چپ}}$



$\xrightarrow[x\to -\frac{x}{۳}]{\text{xها را ضربدر ۳− می‌کنیم.}}$



$\Rightarrow \begin{cases} D=[-۸,۴] \\ R=[-۲,۳] \end{cases}$

نکته: **الف** اگر دامنهٔ $f(x)$ برابر $[m,n]$ باشد و دامنهٔ $f(ax+b)$ خواسته شود، کافی است نامعادلهٔ زیر حل شود تا دامنهٔ $f(ax+b)$ به دست آید:

$m\le ax+b\le n \xrightarrow[a>۰]{\text{تنهاکردن x}} \frac{m-b}{a}\le x\le \frac{n-b}{a}$

ب اگر دامنهٔ $f(ax+b)$ برابر $[m,n]$ باشد و دامنهٔ $f(x)$ خواسته شود، کافی است مراحل زیر طی شود:

$m\le x\le n \xrightarrow[a>۰]{\text{ساختن } ax+b} ma+b\le ax+b\le na+b$

مثال: اگر دامنهٔ $f(x)$ برابر $[-۷,۸]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(۳x-۱)$ را بیابید.

پاسخ: از نکتهٔ (الف) گفته‌شده در بالا استفاده می‌کنیم.

$-۷\le ۳x-۱\le ۸ \Rightarrow -۶\le ۳x\le ۹ \Rightarrow -۲\le x\le ۳ \Rightarrow D_{f(۳x-۱)}=[-۲,۳]$

مثال: اگر دامنهٔ $f(3-2x)$ برابر $[-2,2]$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ را بیابید.

پاسخ: از نکتهٔ (ب) گفته‌شده در بالا استفاده می‌کنیم.

$$-2\le x\le 2 \xrightarrow{\times(-2)} -4\le -2x\le 4 \xrightarrow{+3} -1\le -2x+3\le 7 \Rightarrow D_{f(x)}=[-1,7]$$

قُب! کم‌کم به انتهای این درس نزدیک می‌شویم. تا حالا همهٔ حالت‌های تبدیل (چه عمودی و چه افقی) را گفتیم. الان نوبت به این می‌رسد، که این تبدیل‌ها را با هم مخلوط کنیم و نمودارهای پیچیده‌تری را رسم کنیم.

توجه: برای رسم تابع $y=af(bx+c)+d$ از روی $y=f(x)$ مراحل زیر را انجام دهید:

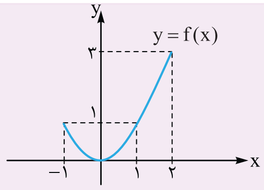
$$y=f(x)\xrightarrow{(1)}y=f(x+c)\xrightarrow{(2)}y=f(bx+c)\xrightarrow{(3)}y=af(bx+c)\xrightarrow{(4)}y=af(bx+c)+d$$

فارسی‌اش می‌شود این‌که، بعد از رسم $y=f(x)$، اول به جای x، $x+c$ می‌گذاریم و $y=f(x+c)$ را رسم می‌کنیم (انتقال افقی). بعد به جای x در $f(x+c)$، bx می‌گذاریم و $f(bx+c)$ را رسم می‌کنیم (انبساط یا انقباض افقی). خب حالا که تغییرات افقی یا همان تغییرات روی محور x تمام شد، می‌رویم سراغ تغییرات عمودی. اول yهای $f(bx+c)$ را در a ضرب می‌کنیم (انبساط یا انقباض عمودی) و بعد با d جمع می‌کنیم (انتقال عمودی).

مثال: نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودارهای خواسته‌شده را به دست آورید.

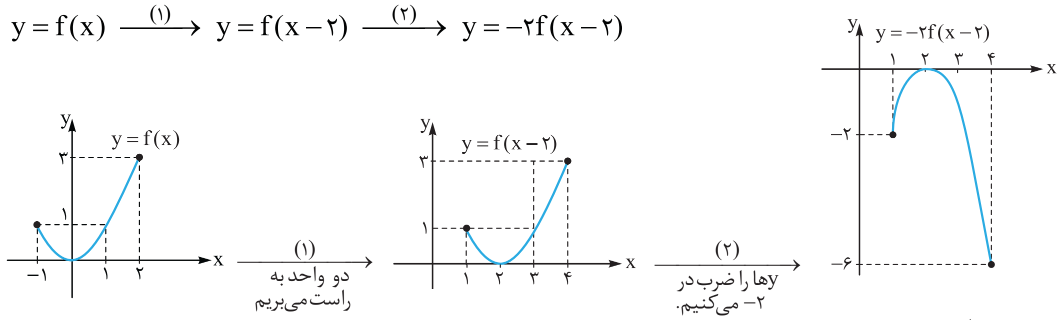
الف) $-2f(x-2)$

ب) $\frac{1}{2}f(-x-2)+\frac{3}{2}$



پاسخ: الف) برای رسم $-2f(x-2)$ از روی $f(x)$ به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

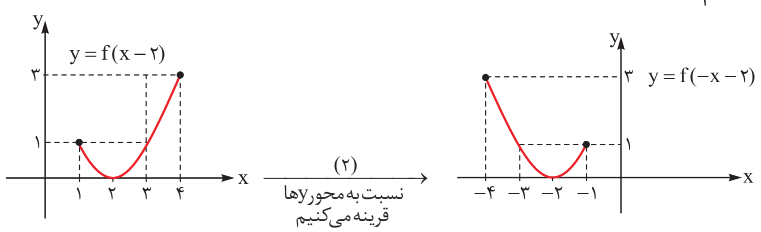
$$y=f(x)\xrightarrow{(1)}y=f(x-2)\xrightarrow{(2)}y=-2f(x-2)$$

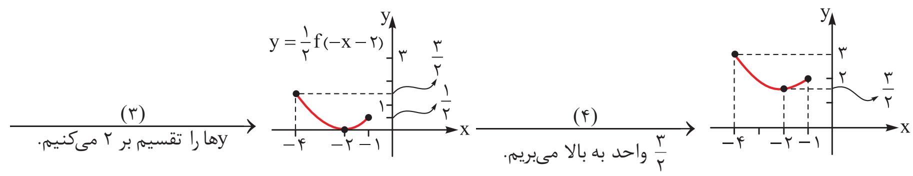


ب) برای رسم $\frac{1}{2}f(-x-2)+\frac{3}{2}$ از روی $f(x)$ به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{(1)}y=f(x-2)\xrightarrow{(2)}y=f(-x-2)\xrightarrow{(3)}y=\frac{1}{2}f(-x-2)\xrightarrow{(4)}y=\frac{1}{2}f(-x-2)+\frac{3}{2}$$

نمودار $f(x-2)$ را در قسمت (الف) رسم کردیم:

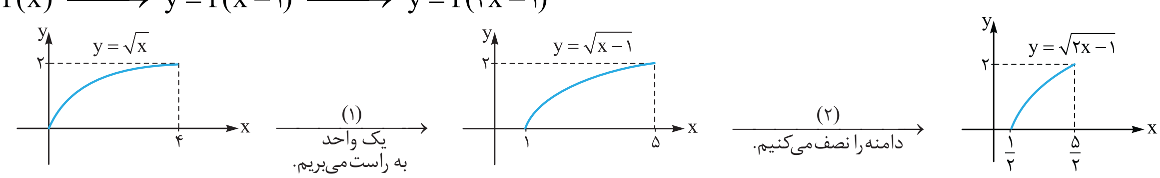




مثال: به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[0,4]$، نمودار $f(2x-1)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را پیدا کنید.

پاسخ: برای رسم نمودار تابع $f(2x-1)$ از روی $f(x)$ به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

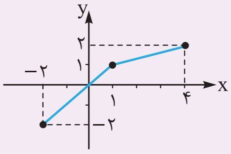
$$y=f(x)\xrightarrow{(1)}y=f(x-1)\xrightarrow{(2)}y=f(2x-1)$$



پس دامنه و برد تابع $f(2x-1)$ برابر است با:

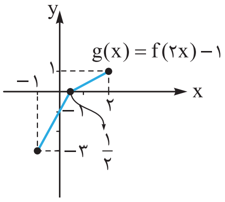
$$D=[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]\quad,\quad R=[0,2]$$

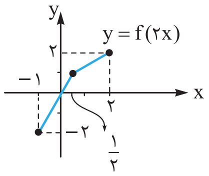
مثال: با توجه به نمودار تابع f که در شکل مقابل آمده است، نمودار تابع $g(x)=f(۲x)-۱$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. *(نهایی فرداد ۹۹)*



پاسخ: ابتدا نمودار $f(۲x)$ را با نصف‌کردن طول نقاط تابع $f(x)$ رسم می‌کنیم، سپس نمودار حاصل را یک واحد با انتقال عمودی پایین می‌آوریم:

با توجه به محدودهٔ تابع g بر روی محور xها و yها دامنهٔ آن $D_g=[-۱,۲]$ و برد آن $R_g=[-۳,۱]$ می‌باشد.





تذکر: بچه‌ها حواستان باشد که مثلاً قرینهٔ $f(x+۱)$ نسبت به محور yها $f(-x+۱)$ است نه $f(-x-۱)$؛ یعنی فقط باید خود x را به $-x$ تبدیل کنید یا مثلاً وقتی $f(۳x)$ را یک واحد به چپ می‌بریم، کافیه «به جای» x بزاریم $x+۱$ و $f(۳(x+۱))=f(۳x+۳)$ به دست میاد و نه $f(۳x+۱)$.

مثال: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای افقی منقبض کنیم و آن را ۳ واحد به راست ببریم، سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور xها قرینه و با ضریب ۳ در راستای عمودی منبسط کرده و ۴ واحد به بالا انتقال دهیم، ضابطهٔ انتقال‌یافتهٔ تابع را بنویسید.

پاسخ: با آرامش مرحله‌به‌مرحله پیش می‌رویم و به تذکر بالا و علی‌الخصوص عبارت «به جایِ» توجه می‌کنیم.

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{به جای } x\to ۲x]{\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{۱}{۲} \text{ در راستای محور } x\text{ها}} y=f(۲x)$$

$$\xrightarrow[\text{به جای } x\to x-۳]{\text{۳ واحد انتقال به راست}} y=f(۲(x-۳))=f(۲x-۶)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} y=-f(۲x-۶)$$

$$\xrightarrow{\text{انبساط عمودی با ضریب ۳}} y=-۳f(۲x-۶)\xrightarrow{\text{۴ واحد انتقال به بالا}} y=-۳f(۲x-۶)+۴$$

بعد از طی‌کردن مراحل به $y=-۳f(۲x-۶)+۴$ رسیدیم.

تذکر: حواستان باشد که اگر تبدیل‌یافتهٔ فقط یک نقطه مانند $A(\alpha,\beta)$ را خواستند، دقیقاً مراحل انتقال را به ترتیب بر روی همان نقطه انجام می‌دهیم.

مثال: اگر نقطهٔ $A(۳,۶)$ روی تابع $f(x)$ باشد، تبدیل‌یافتهٔ نقطهٔ A بر روی $y=-۳f(۲x-۱)+۱$ را A' می‌نامیم. مختصات A' کدام است؟

پاسخ:

$$\underset{(۳,۶)}{f(x)}\Rightarrow\underset{(۳+۱,۶)=(۴,۶)}{f(x-۱)}\Rightarrow\underset{(\frac{۴}{۲},۶)=(۲,۶)}{f(۲x-۱)}\Rightarrow\underset{(۲,۶\times(-۳))=(۲,-۱۸)}{-۳f(۲x-۱)}\Rightarrow\underset{(۲,-۱۸+۱)=(۲,-۱۷)}{-۳f(۲x-۱)+۱}$$

پس مختصات $A'(۲,-۱۷)$ خواهد بود.

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب کامل کنید.

۱- اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از .... نمودار $f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. *(مشابه نهایی فرداد ۹۸ و شهریور ۱۴۰۰)*

۲- اگر بازهٔ $[-۲,۱]$ دامنهٔ تابع $f(x)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(۳x+۱)$ برابر .... است. *(نهایی شهریور ۹۹)*

۳- اگر برد تابع $y=\sqrt{x}$ بازهٔ $[۰,۲]$ باشد، برد تابع $y=۲+\sqrt{x-۲}$ برابر .... است. *(نهایی شهریور ۱۴۰۲)*

۴- اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از .... نمودار $f(x)$ در راستای محور ....ها به دست می‌آید.

۵- اگر دامنهٔ تابع f برابر $[-۱,۳]$ و برد تابع $f(x)$ برابر $[-۲,۱]$ باشد، در تابع $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)$، دامنه برابر با .... و برد برابر با .... می‌باشد.

۶- اگر $A(\alpha,\beta)$ بر روی تابع $f(x)$ قرار داشته باشد، نقطهٔ متناظر آن با مختصات .... بر روی تابع $y=kf(kx)$ قرار دارد.

۷- نقطهٔ $(۲,-۱)$ در تابع $y=-f(۲x+۱)-۱$ متناظر با نقطهٔ .... در تابع $f(x)$ است.

۸- اگر بازهٔ $[-۴,۲]$ دامنهٔ تابع $f(۲x+۱)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر .... است.

درست یا نادرست بودن عبارات زیر را تعیین کنید.

۹- نقطهٔ $(-۸,۶)$ روی نمودار $y=f(x)$ با نقطهٔ $(-۸,۱۲)$ روی نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ متناظر است. *(نهایی دی ۱۴۰۱)*

۱۰- برد تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$، همان برد تابع $y=f(x)$ است.

۱۱- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$، همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است.

۱۲- اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور yها به دست می‌آید.

۱۳- اگر بازهٔ $[-۲,۱]$ دامنهٔ تابع $f(۳x+۱)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-۵,۴]$ است.

۱۴- نمودار تابع $y=f(-x)$، قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xها است.

۱۵- نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۳})$، از انقباض افقی نمودار تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید.

کوتاه پاسخ دهید.

۱۶- نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به کدام محور است؟ *(نهایی شهریور ۹۸)*

۱۷- برای رسم نمودار $y=f(x+۳)$ از روی نمودار $y=f(x)$، نمودار $f(x)$ را چند واحد و در چه راستایی انتقال می‌دهیم؟

۱۸- اگر دامنهٔ $y=f(x)$ بازهٔ $[-۳,۴]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=f(\frac{x}{۳})$ کدام بازه است؟

۱۹- برای رسم نمودار $y=kf(x)$، عرض نقاط نمودار را چگونه تغییر می‌دهیم؟

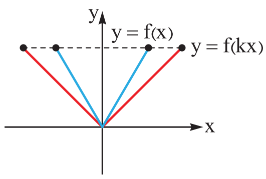
۲۰- نقطهٔ $(-۲,۴)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌باشد. نقطهٔ متناظر آن روی نمودار تابع $y=-f(۲x)$ برابر چه نقطه‌ای است؟

۲۱- برد تابع $y=-۲\sqrt{x}-۱$ چه بازه‌ای است؟

۲۲- اگر $g(x)=f(۲x+۱)$ و نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی $f(x)$ باشد، متناظر این نقطه در تابع $g(x)$ چه نقطه‌ای است؟

۲۳- نمودار تابع $y=۲^x-۱$ از کدام نواحی عبور می‌کند؟

در سؤالات زیر مورد صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.



۲۴- در شکل روبه‌رو، محدودهٔ k کدام است؟ $(۰<k<۱ \_ k>۱)$

۲۵- نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم، ضابطهٔ تابع جدید کدام است؟
$(۲\sqrt{x+۳} \_ ۲\sqrt{x-۳})$

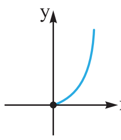
گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

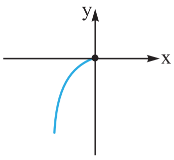
۲۶- برد تابع f بازهٔ $(-۳,۱]$ است. برد تابع $y=-۲f(۳x-۱)+۳$ کدام‌یک از موارد زیر است؟

۱) $[-۸,۰)$ ۲) $(-۱۲,۰]$ ۳) $[۱,۹)$ ۴) $[-۱۰,۲)$

۲۷- xهای نمودار تابع $y=f(x)$ را در راستای افقی نصف کرده و سه واحد به راست منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید کدام است؟

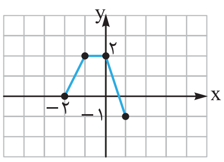
۱) $۲f(x)+۳$ ۲) $f(۲x-۳)$ ۳) $f(۲x-۶)$ ۴) $f(\frac{x-۲}{۳})$

۲۸- اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت


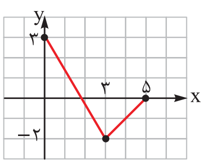
باشد و تابع $g(x)$ تبدیل‌یافتهٔ تابع $f(x)$ بوده و نمودارش


باشد، $f(x)$ با چه اعمالی تبدیل به $g(x)$ شده است؟

۱) $f(-x)$ ۲) $-f(-x)$ ۳) $-f(x)$



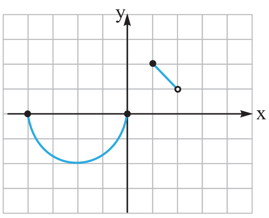
۲۹- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو است. نمودار $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. *(نهایی خرداد ۹۸)*



۳۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(۳-x)$ را رسم کرده و دامنهٔ آن را تعیین کنید. *(نهایی شهریور ۹۸)*

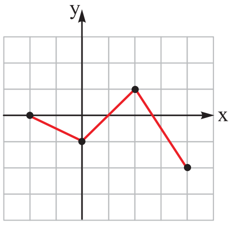
۳۱- الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[۰,۴]$ رسم کنید. *(نهایی شهریور ۱۴۰۱)*

ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کنید، سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.

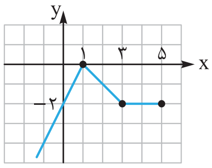


۳۲- نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=f(۱-x)+۱$ را رسم کنید. *(نهایی شهریور ۱۴۰۲)*

۳۳- نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبرو است. نمودار تابع $g(x)=-۳f(\frac{x}{۲})+۲$ را رسم کرده و سپس برد تابع $g(x)$ را تعیین کنید. *(نهایی دی ۱۴۰۲)*



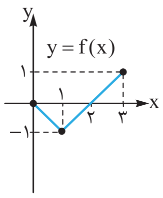
۳۴- نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است. نمودار تابع $y=-f(۲x-۱)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد تابع حاصل را به دست آورید. *(مشابه نهایی دی ۹۹ و نهایی فرداد ۱۴۰۳)*



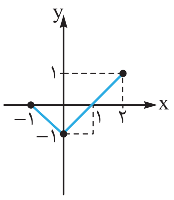
۳۵- نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید. *(نهایی شهریور ۹۹)*

$y=\cos ۲x-۱$

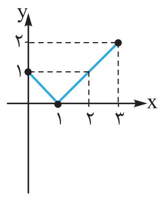
۳۶- با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام‌یک از ضابطه‌های داده‌شده می‌باشد؟



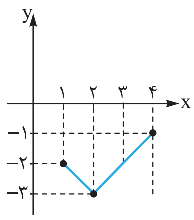
الف)



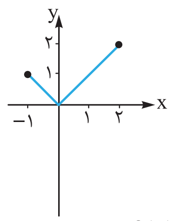
ب)



پ)

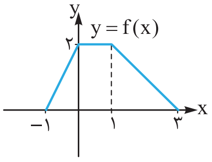


ت)



۱) $f(x)+۱$ ۲) $f(x+۱)+۱$ ۳) $f(x+۱)$ ۴) $f(x-۱)-۲$

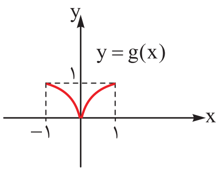
۳۷- به کمک نمودار تابع f، نمودار سایر تابع‌های خواسته‌شده را رسم کنید.



الف) $-f(x)$ ب) $f(-x)$

پ) $-۲f(-x)$ ت) $۲f(-\frac{۱}{۲}x)$

۳۸- با توجه به نمودار g، نمودار تابع‌های خواسته‌شده را رسم کنید.

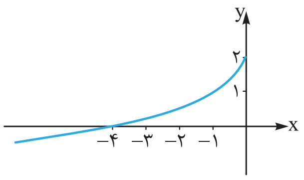


الف) $g(۲x-۱)$

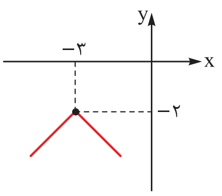
ب) $g(-x+۱)$

پ) $۲g(۳-x)$

۳۹- نمودار تابع مقابل، با استفاده از تبدیل نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطهٔ این تابع را به دست آورید.



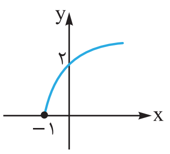
۴۰- نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار $y=|x|$ به دست آمده است، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.



۴۱- نقطهٔ $A(۱,-۴)$ روی نمودار تابع $y=۳-f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطهٔ نظیر A را روی نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x-۲)$ بیابید.

۴۲- اگر تابع $y=x^۲+۱$ را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در جهت افقی منقبض کرده و ۳ واحد به سمت چپ منتقل کنیم و تابع حاصل را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در جهت عمودی منقبض کرده و ۳ واحد به پایین منتقل کنیم، ضابطهٔ تابع حاصل را در هر مرحله بنویسید.

۴۳- اگر نمودار $y=\sqrt{ax+b}$ مطابق شکل روبه‌رو باشد، نمودار $y=\sqrt{-bx+۲a}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



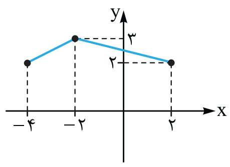
۴۴- اگر دامنهٔ تابع $y=۲f(\frac{x-۱}{۳})-۵$ برابر $[-۲,۷]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=-f(۲-x)-۱$ چه بازه‌ای است؟

۴۵- اگر برد تابع $y=۲f(\frac{x-۱}{۳})-۵$ برابر $[-۲,۳]$ باشد، برد تابع $y=-f(۲-x)-۱$ چه بازه‌ای است؟

۴۶- تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & -۱\le x<۱ \\ \sqrt{x-۱} & ۱\le x<۵ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. الف) نمودار آن را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) نمودار $y=f(۲-x)-۱$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

۴۷- اگر نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(x+۲)+۲$ مطابق شکل روبه‌رو باشد، نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.



۴۸- مراحل رسم نمودار $y=۲x^۲-۴x+۱$ از روی نمودار $y=x^۲$ را بیان کنید.

۴۹- نمودار $y=\frac{۳x-۴}{x-۱}$ را با استفاده از نمودار $y=\frac{۱}{x}$ رسم کرده و مراحلش را بنویسید.

۵۰- اگر نقطهٔ $(۲,-۱)$ روی تابع $y=-f(۱-۲x)+۳$ باشد، متناظر آن نقطه بر روی تابع $y=۲f(\frac{x+۱}{۳})-۱$ چه نقطه‌ای است؟

۵۱- اگر نمودار $y=x^۲+۲x-۲$ را k واحد به راست انتقال داده و آن را نسبت به محور xها قرینه کنیم، عرض از مبدأ نمودار حاصل برابر -۱ خواهد بود، مقدار k را بیابید. $(k>۰)$

۵۲- نمودارهای $y=\sin ۲x$ و $y=\sin\frac{x}{۲}$ در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ چند نقطهٔ برخورد دارند؟

بخش ۲: تابع درجه سوم، توابع یکنوا

در این درس ابتدا مفهوم چندجمله‌ای را می‌گوییم و بعد از آن سراغ یکنوایی می‌رویم. بخش زیادی از یکنوایی مجدداً در فصل ۵ (کاربرد مشتق) تدریس می‌شود که این نشان از اهمیت بالای این مفهوم است.

تابع چندجمله‌ای از درجه n

هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۱x+a_۰$ که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است و اعداد $a_۰,a_۱,...,a_{n-۱},a_n$ حقیقی‌اند $(a_n\neq ۰)$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم. *(منظور از درجه، همون بزرگترین توان x است.)*

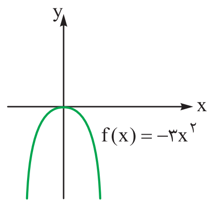
توجه: در تابع‌های چندجمله‌ای رادیکال، قدرمطلق، جزءصحیح، عامل مثلثاتی، لگاریتم و ... وجود ندارد. برای مثال:

- $f(x)=x^۲+۶x$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ است.
- $f(x)=(x-۱)^۳+x+۲$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ است.
- $f(x)=(x-۱)^۳x+۲$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است. *(توان‌ها جمع می‌شن!!)*
- $f(x)=۲$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ صفر است. *(۲ همون $۲x^۰$ است.)*

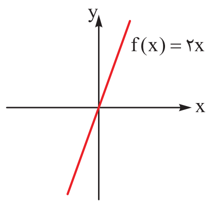
تذکر: مطابق پاورقی کتاب درسی، برای $f(x)=۰$ درجه تعریف نمی‌شود.

- $f(x)=\sqrt{x}$، $f(x)=|x|$، $f(x)=\cos x$، $f(x)=۲^x$ و ... چندجمله‌ای نیستند.

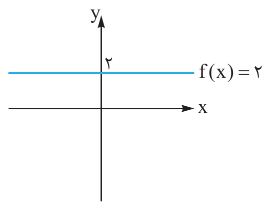
در حالت کلی می‌دانیم که تابع ثابت $f(x)=c$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ صفر، تابع خطی $f(x)=ax+b$ $(a\neq ۰)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ یک و $f(x)=ax^۲+bx+c$ $(a\neq ۰)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ است. نمودارها را هم ببینید:



تابع درجهٔ ۲ (سهمی)



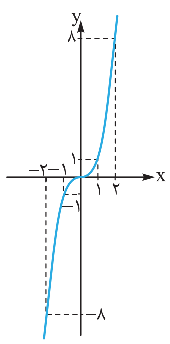
تابع درجهٔ ۱ (خطی)

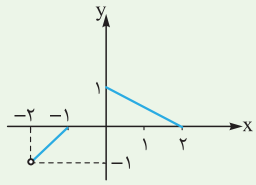


تابع درجهٔ صفر

تابع درجه ۳ *(به‌قول قدیمی‌ها، تا ۳ نشه بازی نشه.)*

پس الان معروف‌ترین تابع درجهٔ ۳، یعنی $f(x)=x^۳$ را خدمتتون معرفی می‌کنیم.
با نقطه‌دادن به این تابع می‌بینید که نمودار آن به صورت مقابل است. *(شبیه لُر هستش.)*
دقت کنید که دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ است.
خب! همان‌طور که می‌بینید تابع $f(x)=x^۳$ یک‌به‌یک است *(هر خط موازی محور xها باید نمودارش رو حداکثر توی یه نقطه قطع کنه که می‌کنه.)*



ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل ۱ — رشتهٔ ریاضی و فیزیک — مدت امتحان: ۹۰ دقیقه — Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) نمودار $y=(x-1)^3+1$ فقط از دو ناحیه عبور می‌کند. ب) برای رسم $f(2x+1)$ از روی $f(x)$، ابتدا نمودار را با ضریب $\frac{1}{2}$ در راستای افق منقبض کرده و سپس یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم. پ) اگر تابع $y=f(x)$ اکیداً نزولی باشد، تابع $y=-f(x)$ اکیداً صعودی خواهد بود. ت) تابع $y=-\sqrt[3]{x}$، اکیداً صعودی است.	۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر $(\frac{1}{3})^{2x+1} \le (\frac{1}{27})$ باشد، حدود x .... است. ب) $x^5+32a^5=(x+\cdots\cdots)(x^4-2ax^3+\cdots\cdots-8a^3x+16a^4)$	۱
۳	تابع $f(x)=\begin{cases}-x^3 & -1<x<1\\ x & 1\le x\le 2\end{cases}$ را در نظر بگیرید: الف) نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید. ب) دامنه و برد تابع $y=2f(-x-1)-1$ را به کمک نمودارش پیدا کنید.	۲
۴	اگر نقطهٔ $A(-2,1)$ روی تابع $f(x)$ باشد، مختصات نقطهٔ A را روی تابع $y=\frac{-1}{3}f(x-2)$ به دست آورید.	۱
۵	نمودار تابع $y=-f(-2x)+1$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را بیابید.  	۲
۶	اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-1,4]$ و برد آن $[2,5]$ باشد، دامنه و برد دو تابع $y=3f(x+1)$ و $y=2-f(2x-1)$ را به دست آورید.	۲
۷	به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ با دامنهٔ $[0,2\pi]$، نمودار تابع $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ را رسم کنید و در آخر دامنه و برد آن را پیدا کنید.	۲
۸	تابع $f=\{(3,2),(1,0),(-1,0),(-2,-1)\}$ صعودی است یا نزولی؟ چرا؟	۰/۷۵
۹	نمودار تابع $y=\|x-1\|+\|x+2\|$ را در بازهٔ $[-4,3]$ رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را در بازه‌های مختلف بررسی کنید.	۲
۱۰	برای هر یک از موارد خواسته‌شده، تابع‌های f و g را به‌گونه‌ای مثال بزنید که در آن شرایط صدق کند. الف) $\begin{cases} f & \text{صعودی} \\ g & \text{نزولی} \\ f+g & \text{صعودی}\end{cases}$ ب) $\begin{cases} f & \text{صعودی} \\ g & \text{صعودی} \\ f-g & \text{هم صعودی و هم نزولی}\end{cases}$ پ) $\begin{cases} f & \text{نزولی} \\ g & \text{نزولی} \\ f-g & \text{اکیداً صعودی}\end{cases}$	۲/۲۵
۱۱	اگر چندجمله‌ای $f(x)=x(x^2+ax)+4(bx+2)$ بر $(x+2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۱ باشد، نمودار $f(x)$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای یکنوا است.	۲
۱۲	سادهٔ $A=\frac{1+x+x^2+x^3+x^4}{2}$ به ازای $x=\sqrt[5]{3}$ چند برابر $\frac{2}{1-\sqrt[5]{3}}$ است؟	۲
	جمع نمرات	۲۰

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱. انقباض افقی

۲. $[-۱,۰]$

$$\underset{[-۲,۱]}{f(x)} \Rightarrow \underset{[-۲-۱,۱-۱]=[-۳,۰]}{f(x+۱)} \Rightarrow \underset{[-\frac{۳}{۳},\frac{۰}{۳}]=[-۱,۰]}{f(۳x+۱)}$$

۳. $[۲,۴]$

$$\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x-۲} \Rightarrow ۲+\sqrt{x-۲}$$

$$R=[۰,۲] \quad R=[۰,۲] \quad R=[۰+۲,۲+۲]=[۲,۴]$$

۴. انقباض عمودی- y

۵. $[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$ ، $[-۱,\frac{۱}{۲}]$

$$\underset{\substack{D=[-۱,۳]\\R=[-۲,۱]}}{f(x)} \Rightarrow \underset{\substack{D=[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]\\R=[-۲,۱]}}{f(۲x)} \Rightarrow \underset{\substack{D=[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]\\R=[\frac{-۲}{۲},\frac{۱}{۲}]=[-۱,\frac{۱}{۲}]}}{\frac{۱}{۲}f(۲x)}$$

۶. $A'(\frac{\alpha}{k},k\beta)$

$$\underset{(\alpha,\beta)}{f(x)} \to \underset{(\frac{\alpha}{k},\beta)}{f(kx)} \to \underset{(\frac{\alpha}{k},k\beta)}{kf(kx)}$$

۷. $(۵,۰)$؛ نقطهٔ $(۲,-۱)$ در تابع $g(x)=-f(۲x+۱)-۱$ صدق می‌کند؛ یعنی $g(۲)=-۱$.

$$g(۲)=-۱ \Rightarrow g(۲)=-f(۲\times ۲+۱)-۱=-۱$$

$$\Rightarrow -f(۵)=۰ \Rightarrow f(۵)=۰ \Rightarrow (۵,۰)\in f(x)$$

۸. $[-۷,۵]$

$$-۴\le x\le ۲ \xrightarrow[\times ۲]{\text{تولیدکردن } ۲x+۱} -۸\le ۲x\le ۴$$

$$\xrightarrow{+۱} -۷\le ۲x+۱\le ۵ \Rightarrow D_{f(x)}=[-۷,۵]$$

۹. نادرست؛ چون نقطهٔ $(-۸,۶)$ روی $f(x)$ با نقطهٔ $(-۸,\frac{۶}{۲})=(-۸,۳)$ روی تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x)$ متناظر است.

۱۰. نادرست؛ چون اگر برد تابع $y=kf(x)$، $[ka,kb]$ باشد، برد تابع $y=f(x)$، $[a,b]$ خواهد بود.

۱۱. درست؛ چون در تابع $y=kf(x)$، فقط برد k برابر می‌شود و دامنه تغییری ندارد.

۱۲. نادرست؛ چون از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

۱۳. درست

$$-۲\le x\le ۱ \xrightarrow[\times ۳]{\text{تولیدکردن } ۳x+۱} -۶\le ۳x\le ۳$$

$$\xrightarrow{+۱} -۵\le ۳x+۱\le ۴ \Rightarrow D_{f(x)}=[-۵,۴]$$

۱۴. نادرست؛ نمودار $y=f(-x)$ قرینهٔ $y=f(x)$ نسبت به محور yهاست.

۱۵. نادرست؛ نمودار $y=f(\frac{x}{۳})$ از انبساط افقی با ضریب ۳ تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید.

۱۶. محور xها

۱۷. ۳ واحد در راستای افقی به سمت چپ

۱۸. $[-۹,۱۲]$

$$f(x) \Rightarrow f(\frac{x}{۳})$$

$$D=[-۳,۴] \qquad D=[-۳(۳),۴(۳)]=[-۹,۱۲]$$

۱۹. در k ضرب می‌کنیم.

۲۰. $(-۱,-۴)$

$$\underset{(-۲,۴)}{f(x)} \Rightarrow \underset{(-\frac{۲}{۲},۴)}{f(۲x)} \Rightarrow \underset{(-۱,-(۴))=(-۱,-۴)}{-f(۲x)}$$

۲۱. $(-\infty,-۱]$

$$\underset{R=[۰,+\infty)}{\sqrt{x}} \Rightarrow \underset{R=(-\infty,۰]}{-۲\sqrt{x}} \Rightarrow \underset{R=(-\infty,۰-۱]=(-\infty,-۱]}{-۲\sqrt{x}-۱}$$

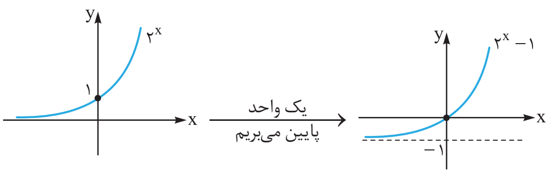
۲۲. $(\frac{x_۰-۱}{۲},y_۰)$؛ نقطهٔ $(x_۰,y_۰)$ روی $f(x)$ قرار دارد، یعنی $f(x_۰)=y_۰$.

در تابع $g(x)=f(۲x+۱)$ برای به دست آوردن متناظر نقطه‌ای که عرضش برابر $y_۰$ باشد، داریم: $g(x)=y_۰ \Rightarrow f(۲x+۱)=y_۰$

$$\xrightarrow{\text{چون } f(x_۰)=y_۰} ۲x+۱=x_۰ \Rightarrow x=\frac{x_۰-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow (\frac{x_۰-۱}{۲},y_۰)\in g(x)$$

۲۳. اول و سوم؛ نمودار $y=۲^x$ را یک واحد پایین می‌بریم.



۲۴. $۰<k<۱$؛ مطابق شکل انبساط افقی داریم؛ پس $۰<k<۱$.

۲۵. $۲\sqrt{x-۳}$

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x\to x-۳]{\text{سه واحد سمت راست می‌بریم}} \sqrt{x-۳}$$

$$\xrightarrow{\text{دو برابر کردن عرض‌ها}} ۲\sqrt{x-۳}$$

۲۶. $[۱,۹)$

$$\underset{R=(-۳,۱]}{f(x)} \Rightarrow \underset{R=(-۳,۱]}{f(۳x-۱)} \Rightarrow \underset{R=[-۲,۶)}{-۲f(۳x-۱)}$$

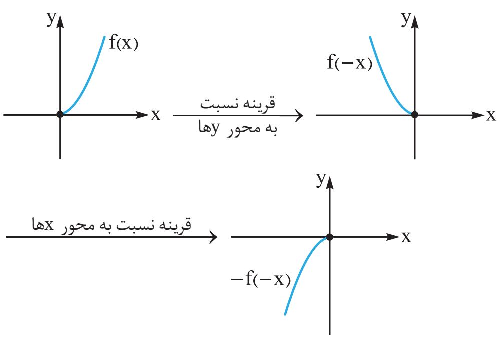
$$\Rightarrow \underset{R=[۱,۹)}{-۲f(۳x-۱)+۳}$$

۲۷. $f(۲x-۶)$

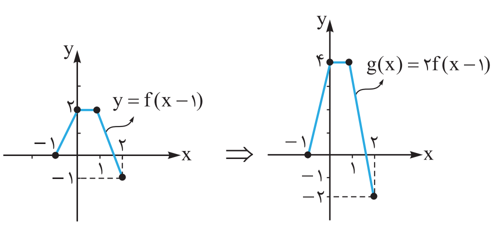
$$f(x) \xrightarrow[x\to ۲x]{\text{نصف‌کردن xها}} f(۲x)$$

$$\xrightarrow[x\to x-۳]{\text{انتقال ۳ واحد به راست}} f(۲(x-۳))=f(۲x-۶)$$

۲۸. $-f(-x)$

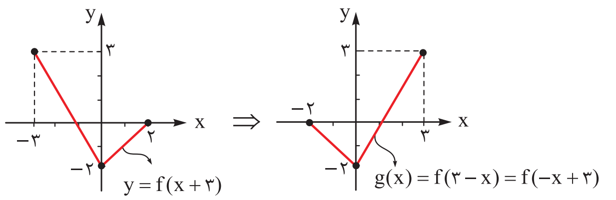


۲۹. ابتدا نمودار $f(x-۱)$ را با انتقال افقی $f(x)$، یک واحد به راست می‌بریم. در مرحلهٔ بعد عرض‌های نقاط را دو برابر کرده و نمودار $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم می‌کنیم.



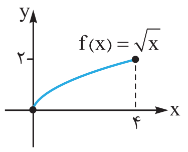
$D_g=[-۱,۲]$ و $R_g=[-۲,۴]$

۳۰. ابتدا نمودار $f(x+3)$ را با انتقال افقی $f(x)$، سه واحد به چپ می‌بریم، در مرحلهٔ بعد نمودار حاصل را نسبت به محور yها قرینه کرده و نمودار $g(x)=f(-x+3)$ را رسم می‌کنیم:

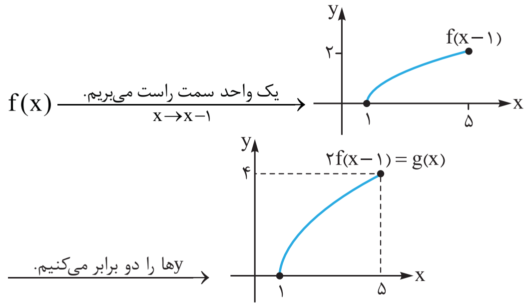


$D_g=[-2,3]$

۳۱. الف نمودار $\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[0,4]$ رسم می‌کنیم.

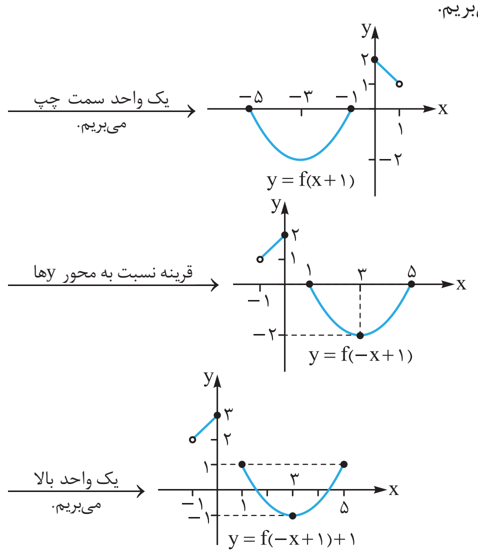


ب مراحل را طی می‌کنیم:

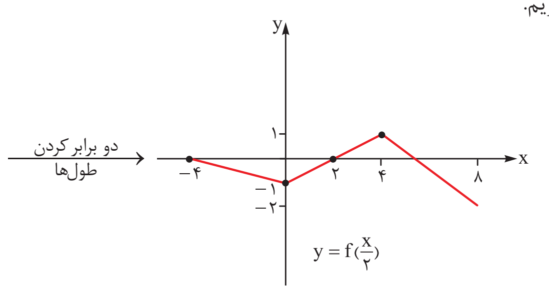


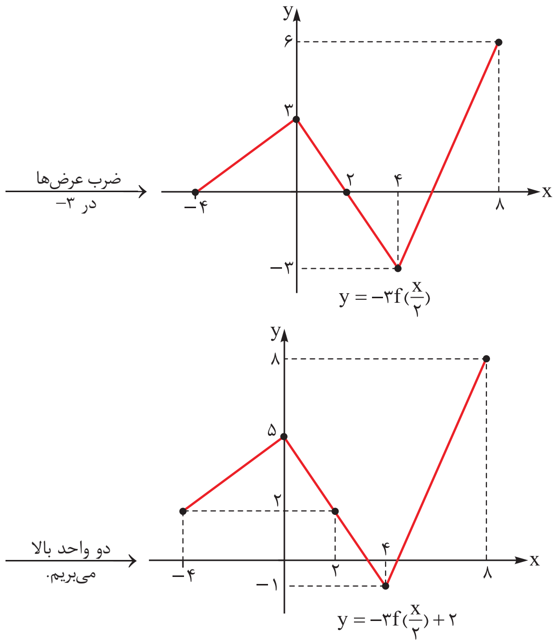
$D_g=[1,5]\,,\ R_g=[0,4]$

۳۲. برای رسم $y=f(-x+1)+1$، ابتدا نمودار $f(x)$ را ۱ واحد سمت چپ برده و سپس آن را نسبت به محور yها قرینه کرده و نمودار حاصل را ۱ واحد بالا می‌بریم.



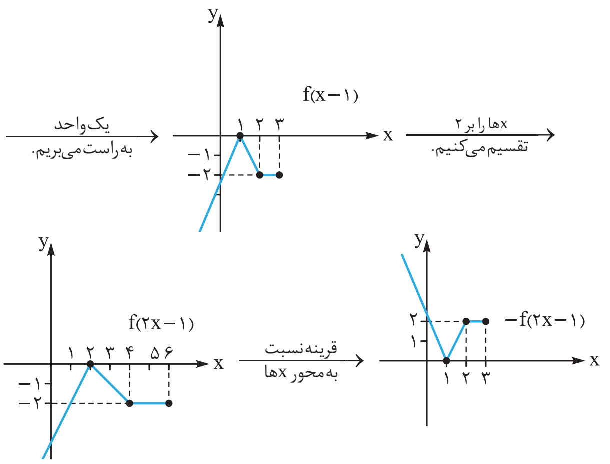
۳۳. برای رسم $g(x)=-3f(\frac{x}{2})+2$ از روی $f(x)$، ابتدا طول‌ها را دو برابر کرده، سپس عرض نقاط را در (-3) ضرب و نمودار حاصل را ۲ واحد بالا می‌بریم.





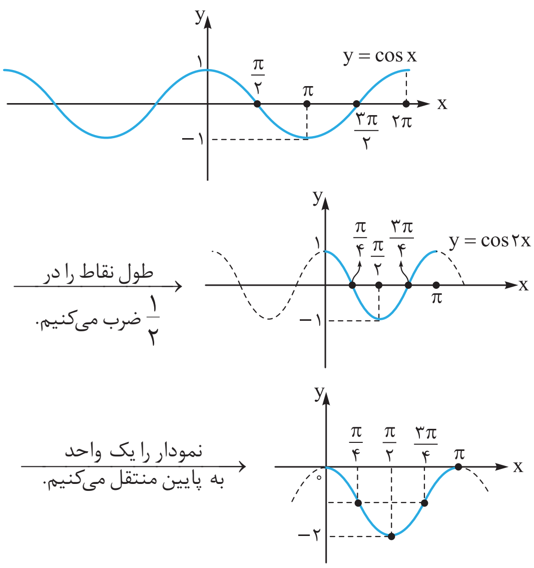
$R_g=[-1,8]$

۳۴. برای رسم تابع $y=-f(2x-1)$، ابتدا نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست برده، سپس xها را بر ۲ تقسیم کرده و آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



با توجه به شکل دامنهٔ تابع برابر بازهٔ $(-\infty,3]$ و برد آن بازهٔ $[0,+\infty)$ است.

۳۵. مرحله‌به‌مرحله رسم نمودار را انجام می‌دهیم:



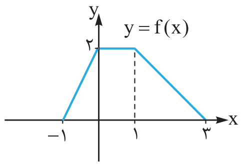
۳۶. **الف** در این قسمت نمودار تابع f، یک واحد به سمت چپ آمده ولی برد تابع هیچ تغییری نکرده، پس این تابع، $f(x+1)$ است. *(تغییر روی x برعکسه.)*

ب در این قسمت نمودار تابع f، یک واحد بالا آمده است ولی دامنه تغییری نکرده، پس این تابع، $f(x)+1$ است.

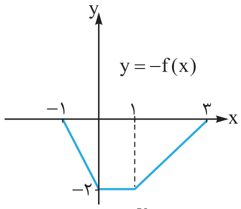
پ *قب!* با کمی دقت متوجه می‌شویم که نمودار یک واحد به راست و دو واحد پایین آمده پس این تابع، $f(x-1)-2$ است.

ت نمودار یک واحد به چپ آمده و یک واحد هم بالا؛ یعنی این تابع، $f(x+1)+1$ است.

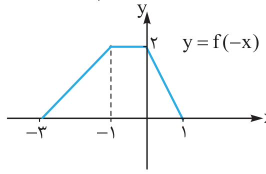
۳۷. نمودار f به صورت مقابل است:



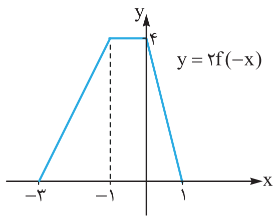
الف برای رسم $-f(x)$، نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم، ببینید:



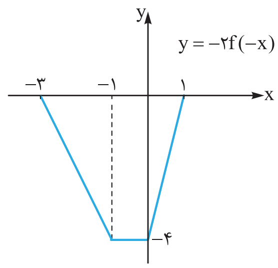
ب برای رسم $f(-x)$، این بار نمودار f را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم:



پ برای رسم $-2f(-x)$ باید برد $f(-x)$ (نمودار قسمت (ب)) را دو برابر کنیم و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



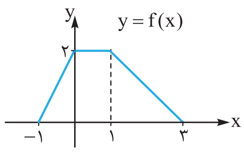
$\xrightarrow[\text{قرینه می‌کنیم}]{\text{نسبت به محور xها}}$



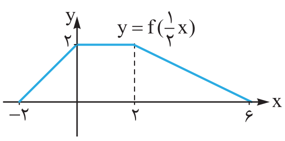
ت برای رسم $2f(\frac{-1}{2}x)$ باید مراحل زیر را انجام دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow{(1)}y=f(\frac{1}{2}x)\xrightarrow{(2)}y=f(-\frac{1}{2}x)$$

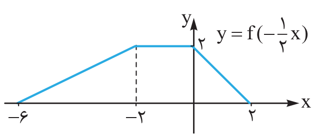
$$\xrightarrow{(3)}y=2f(-\frac{1}{2}x)$$



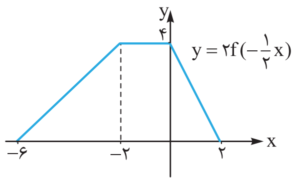
$\xrightarrow[\text{دامنه را دو برابر می‌کنیم}]{(1)}$



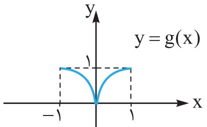
$\xrightarrow[\text{نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم}]{(2)}$



$\xrightarrow[\text{برد تابع را دو برابر می‌کنیم}]{(3)}$



۳۸. نمودار تابع g به صورت مقابل است:

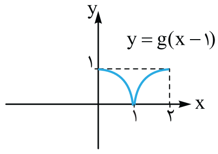


الف برای رسم $g(2x-1)$ به ترتیب، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$g(x)\xrightarrow{(1)}g(x-1)\xrightarrow{(2)}g(2x-1)$$

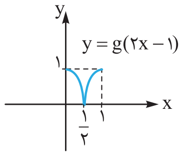
$g(x)$ را که داریم، پس $g(x-1)$ را به دست می‌آوریم:

$\xrightarrow[\text{g را یک واحد به راست‌ می‌بریم}]{(1)}$



برای رسم $g(2x-1)$ از روی $g(x-1)$:

$\xrightarrow[\text{دامنهٔ تابع را نصف می‌کنیم}]{(2)}$

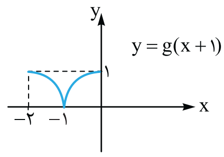


ب برای رسم $g(-x+1)$ به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

$$y=g(x)\xrightarrow{(1)}y=g(x+1)\xrightarrow{(2)}y=g(-x+1)$$

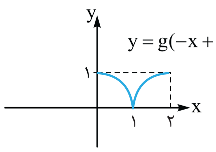
برویم سروقتِ رسم $g(x+1)$:

$\xrightarrow[\text{g را یک واحد به چپ می‌بریم}]{(1)}$



برای رسم $g(-x+1)$ از روی $g(x+1)$:

$\xrightarrow[\text{نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم}]{(2)}$



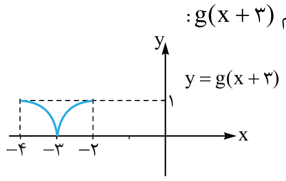
پ مراحل رسم $y=2g(-x+3)$ از روی g به صورت زیر است:

$$y=g(x)\xrightarrow{(1)}y=g(x+3)\xrightarrow{(2)}$$

$$y=g(-x+3)\xrightarrow{(3)}y=2g(-x+3)$$

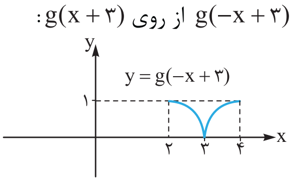
برای رسم $g(x+3)$:

$\xrightarrow[\text{g را سه واحد به چپ می‌بریم}]{(1)}$



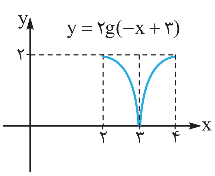
رسم $g(-x+3)$ از روی $g(x+3)$:

$\xrightarrow[\text{نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم}]{(2)}$

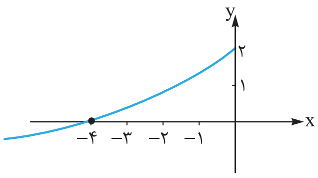


و در نهایت برای رسم $2g(-x+3)$:

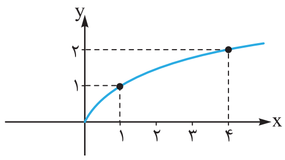
$\xrightarrow[\text{برد تابع را دوبرابر می‌کنیم}]{(3)}$



۳۹. باید ضابطهٔ نمودار مقابل را برحسب $f(x)=\sqrt{x}$ پیدا کنیم.



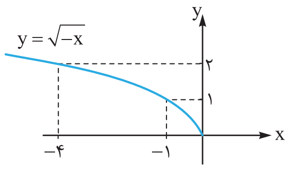
به نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ نگاه کنید: چه‌طوری می‌توانیم از $f(x)=\sqrt{x}$ به ضابطهٔ نمودار خواسته‌شده برسیم؟



با کمی دقت می‌توان فهمید که باید مراحل زیر را طی کنیم:

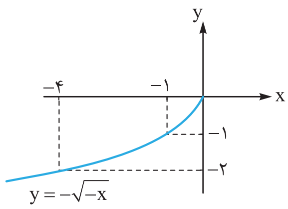
ابتدا نمودار را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم یعنی:

$y=\sqrt{-x}$



حالا باید $\sqrt{-x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم؛ یعنی:

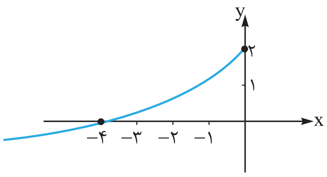
$y=-\sqrt{-x}$



و در گام آخر $-\sqrt{-x}$ را ۲ واحد بالا می‌بریم؛ یعنی:

$y=-\sqrt{-x}+۲$

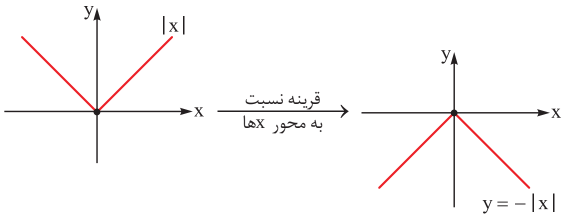
که نمودارش به صورت مقابل است:



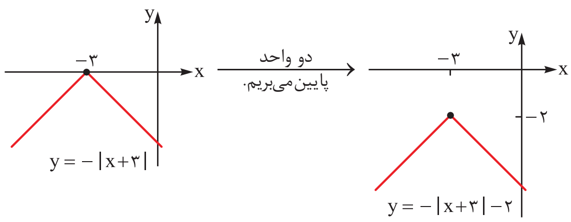
پس ضابطهٔ $y=-\sqrt{-x}+۲$ نمودار خواسته‌شده است.

اگر کمی برات سفته، مجدداً نیم نگاهی به درس‌نامه بنداز چون این سؤال خیلی مهمه.

۴۰. ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم کرده و چون نمودار نسبت به محور xها قرینه شده، ابتدا $|x|$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



حال نمودار به دست آمده را ۳ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.



پس ضابطه به صورت $y=-|x+۳|-۲$ بوده است.

۴۱. نقطهٔ $A(۱,-۴)$ بر روی تابع $g(x)=۳-f(x)$ قرار دارد، یعنی در آن صدق می‌کند؛ پس $g(۱)=-۴$.

$$g(x)=۳-f(x)\xrightarrow{x=۱} g(۱)=۳-f(۱)=-۴ \Rightarrow f(۱)=۷ \Rightarrow (۱,۷)\in f(x)$$

برای به دست آوردن نظیر نقطهٔ A روی تابع $y=\frac{۱}{۲}f(x-۲)$، کافی است نقطهٔ $(۱,۷)$ را دو واحد به راست انتقال داده و سپس yهایش را ضربدر $\frac{۱}{۲}$ کنیم.

$$\underset{(۱,۷)}{f(x)} \Rightarrow \underset{(۳,۷)}{f(x-۲)} \Rightarrow \underset{(۳,\frac{۷}{۲})}{\frac{۱}{۲}f(x-۲)}$$

پس نقطهٔ مورد نظر $(۳,\frac{۷}{۲})$ می‌باشد.

۴۲.

$$y=x^۲+۱ \xrightarrow[x\to ۲x]{\text{انقباض افقی با ضریب } \frac{۱}{۲}} y=(۲x)^۲+۱=۴x^۲+۱$$

$$\xrightarrow[x\to x+۳]{\text{۳ واحد به چپ}} ۴(x+۳)^۲+۱$$

$$\xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲}(۴(x+۳)^۲+۱)$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}} \frac{۱}{۲}(۴(x+۳)^۲+۱)-۳$$

۴۳. از روی نمودار معلوم است که $f(۰)=۲$ و $f(-۱)=۰$. این نقاط را در تابع صدق می‌دهیم.

$$f(x)=\sqrt{ax+b} \xrightarrow{f(۰)=۲} \sqrt{a(۰)+b}=\sqrt{b}=۲ \Rightarrow b=۴$$

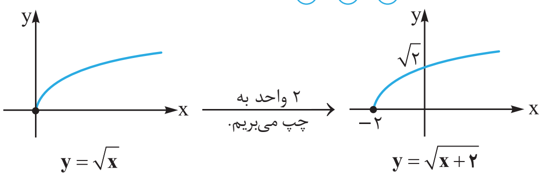
$$f(x)=\sqrt{ax+۴} \xrightarrow{f(-۱)=۰} \sqrt{a(-۱)+۴}=۰$$

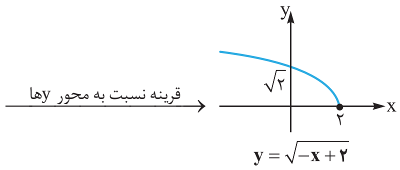
$$\Rightarrow -a+۴=۰ \Rightarrow a=۴$$

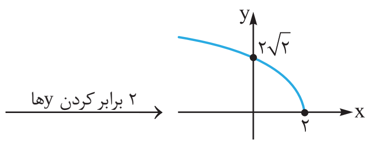
حال برای رسم $\sqrt{-bx+۲a}=\sqrt{-۴x+۸}$، تابع $y=\sqrt{x}$ را مطابق مراحل زیر انتقال می‌دهیم.

$$y=\sqrt{-۴x+۸}=\sqrt{۴(-x+۲)}=۲\sqrt{-x+۲}$$

۳ ۲ ۱







$$\Rightarrow \begin{cases} D=(-\infty,۲] \\ R=[۰,+\infty) \end{cases}$$

۴۴. از روی دامنهٔ $y=۲f(\frac{x-۱}{۳})-۵$، دامنهٔ $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، به این صورت که x در بازهٔ $[-۲,۷)$ قرار دارد و با ساختن $\frac{x-۱}{۳}$ در آن نامعادله، دامنهٔ $f(x)$ به دست می‌آید، سپس با داشتن دامنهٔ $f(x)$، دامنهٔ $y=-f(۲-x)-۱$ را به دست می‌آوریم، به این صورت که می‌گوییم $(۲-x)$ بین دو عدد قرار دارد (که از مرحلهٔ قبل محاسبه کردیم) و x را تنها می‌کنیم.

$$-۲\le x<۷ \xrightarrow[-۱]{\text{ساختن } \frac{x-۱}{۳}} -۳\le x-۱<۶$$

$$\xrightarrow{\div ۳} -۱\le \frac{x-۱}{۳}<۲ \Rightarrow D_{f(x)}=[-۱,۲)$$

$$-۱\le ۲-x<۲ \xrightarrow{-۲} -۳\le -x<۰$$

$$\xrightarrow{\times(-)} ۰<x\le ۳ \Rightarrow D_{-f(۲-x)-۱}=(۰,۳]$$

۴۵. برد تابع $y=۲f(\frac{x-۱}{۳})-۵$ برابر $[-۲,۳]$ هست؛ یعنی:

$$-۲\le ۲f(\frac{x-۱}{۳})-۵\le ۳ \Rightarrow ۳\le ۲f(\frac{x-۱}{۳})\le ۸ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\le f(\frac{x-۱}{۳})\le ۴$$

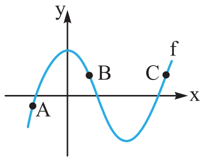
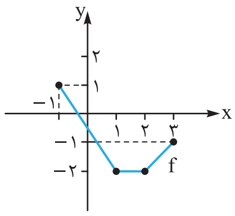
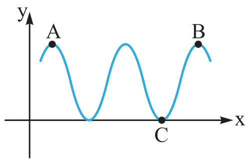
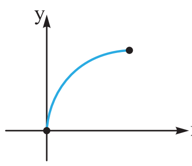
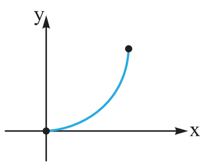
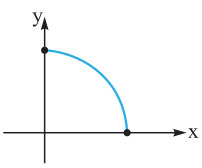
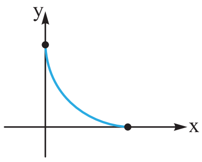
می‌دانیم برد تابع $f(\frac{x-۱}{۳})$ و $f(۲-x)$ یکی هست، پس $\frac{۳}{۲}\le f(۲-x)\le ۴$.

$$\frac{۳}{۲}\le f(۲-x)\le ۴ \Rightarrow -۴\le -f(۲-x)\le -\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow -۵\le -f(۲-x)-۱\le -\frac{۵}{۲}$$

پس برد تابع $y=-f(۲-x)-۱$ بازهٔ $[-۵,-\frac{۵}{۲}]$ است.

ردیف	نمونه امتحان نیمسال دوم	رشتهٔ ریاضی و فیزیک	حسابان ۲	نمره
	امتحان شمارهٔ ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	**Kheilisabz.com**	

ردیف		نمره
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر دامنهٔ $f(x)=\sqrt{x-1}$ بازهٔ $[1,5]$ باشد، برد تابع $y=-2f(x+1)-3$ بازهٔ .... است. ب) دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2\cos^2 x-1$ برابر .... است. پ) معادلهٔ مجانب قائم تابع $y=\frac{1}{x-\|x\|}$، .... است. ت) در نمودار مقابل در نقطهٔ .... ، $f'(x).f''(x)<0$ است. 	۱
۲	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً وارون‌پذیر است. ب) مجموع جواب‌های معادلهٔ $\sin x=\frac{1}{3}$ در بازهٔ $[0,\pi]$ برابر π است. پ) تابع $y=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[0,+\infty)$ مشتق‌پذیر است. ت) تابع $y=\tan x$، در دامنه‌اش نقطهٔ عطف ندارد.	۱
۳	نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل روبه‌رو است. الف) نمودار تابع $g(x)=-2f(-2x+1)+1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای که $g(x)$ در آن صعودی، اکیداً صعودی، نزولی و اکیداً نزولی است را مشخص کنید. 	۱/۵ ۱
۴	شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار $f(x)=(\sin x+\cos x)^2$ را نشان می‌دهد. مساحت مثلث ABC چه‌قدر است؟ 	۱/۲۵
۵	اگر $\tan\alpha=2$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4}-2\alpha)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۶	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3x+2}$ ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-3}}$	۱/۵
۷	مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\|x-1\|-3}$ را بیابید.	۱/۲۵
۸	مشتق‌پذیری تابع $f(x)=(x-3)[x]$ را در $x=3$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن الزامی نیست.) الف) $y=\frac{x(1-x)^3}{(2x+3)(\sqrt{x}+x)}$ ب) $y=\frac{\tan(\frac{1}{x})}{\cos x^2-\cos^2 x}$	۲/۵
۱۰	اگر $g(x)=f(x^2+x+1)$ باشد و $f'(3)=-\frac{5}{3}$ باشد، مقدار $g'(-2)$ را بیابید.	۰/۷۵
۱۱	در کدام‌یک از توابع زیر، آهنگ تغییر متوسط و آهنگ تغییر لحظه‌ای، هر دو مثبت و نزولی هستند؟ (با دلیل) ۱)  ۲)  ۳)  ۴) 	۱/۲۵
۱۲	خط مماس بر تابع $f(x)=x^3-ax^2+b$ در نقطهٔ $(2,-15)$ از آن عبور می‌کند. با به دست آوردن a و b، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع را بیابید.	۲
۱۳	جدول رفتار و نمودار $y=\frac{-2x+1}{x-1}$ را رسم کرده و از روی آن نمودار $y=\|\frac{-2x+1}{x-1}\|$ را رسم کنید.	۲/۵
	جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

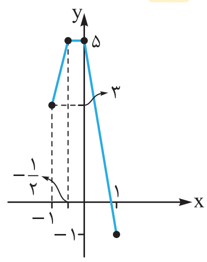
۱. الف $[-۷,-۳]$ (۰/۲۵) ب π (۰/۲۵)

پ $x=۰$ (۰/۲۵) ت A (۰/۲۵)

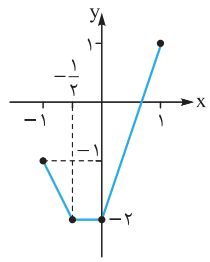
۲. الف درست (۰/۲۵) ب درست (۰/۲۵)

پ نادرست (۰/۲۵) ت نادرست (۰/۲۵)

۳. الف



و



$y=-۲f(-۲x+۱)+۱$ (۰/۵) $y=f(-۲x+۱)$ (۰/۵)

دامنه: $D=[-۱,۱]$ (۰/۲۵) و برد: $\mathbb{R}=[-۱,۵]$ (۰/۲۵)

ب صعودی: $[-۱,۰]$ (۰/۲۵)، اکیداً صعودی: $[-۱,-\frac{۱}{۲}]$ (۰/۲۵)، نزولی: $[-\frac{۱}{۲},۱]$ (۰/۲۵). اکیداً نزولی: $[۰,۱]$ (۰/۲۵)

۴. $f(x)=۱+\sin ۲x$ (۰/۲۵)

قاعدهٔ مثلث $(AB)=۲T=۲\pi$ (۰/۲۵)

ارتفاع مثلث $(max-min)=۲-۰=۲$ (۰/۲۵)

مساحت $=\frac{۱}{۲}\times ۲\pi\times ۲=۲\pi$ (۰/۲۵)

۵. $\tan ۲\alpha=\dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}=\dfrac{۲\times ۲}{۱-۲^{۲}}=-\dfrac{۴}{۳}$ (۰/۵)

$\tan(\frac{\pi}{۴}-۲\alpha)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{۴}-\tan ۲\alpha}{۱+\tan\frac{\pi}{۴}.\tan ۲\alpha}=\dfrac{۱+\frac{۴}{۳}}{۱-\frac{۴}{۳}}=-۷$ (۰/۷۵)

۶. الف $\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{\sqrt{x^{۲}-۴}}{x^{۲}-۳x+۲}\times\dfrac{\sqrt{x^{۲}-۴}}{\sqrt{x^{۲}-۴}}$

$=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۱)(x-۲)\sqrt{x^{۲}-۴}}=\dfrac{۴}{۰^{+}}=+\infty$ (۰/۷۵)

ب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۷}-\sqrt{x-۳}}\times\dfrac{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۱}}$

$\times\dfrac{\sqrt{x+۷}+\sqrt{x-۳}}{\sqrt{x+۷}+\sqrt{x-۳}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۳(\sqrt{x+۷}+\sqrt{x-۳})}{۱۰(\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۱})}$

$=\dfrac{۳\times ۲\sqrt{x}}{۱۰\times ۲\sqrt{x}}=\dfrac{۳}{۱۰}$ (۰/۷۵)

۷. مجانب قائم: $|x-۱|-۳=۰\Rightarrow x=۴\ ,\ x=-۲$ (۰/۵)
(۰/۲۵)

با توجه به دامنهٔ $[۰,+\infty)$ فقط $x=۴$ قابل قبول است.

مجانب افقی: $y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{|x-۱|-۳}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}\times\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{\sqrt{x}}=۰$ (۰/۲۵)
(۰/۲۵)

۸. تابع در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست. (۰/۲۵)

$f'_{+}(۳)=\lim\limits_{x\to ۳^{+}}\dfrac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^{+}}\dfrac{(x-۳)[x]-۰}{x-۳}=۳$ (۰/۵)

$f'_{-}(۳)=\lim\limits_{x\to ۳^{-}}\dfrac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^{-}}\dfrac{(x-۳)[x]-۰}{x-۳}=۲$ (۰/۵)

۹. الف $y'=\dfrac{(۱(۱-x)^{۳}-۳(۱-x)^{۲}x)((۲x+۳)(\sqrt{x}+x))}{((۲x+۳)(\sqrt{x}+x))^{۲}}$

$-\dfrac{(۲(\sqrt{x}+x)+(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}+۱)(۲x+۳))(x(۱-x)^{۳})}{((۲x+۳)(\sqrt{x}+x))^{۲}}$ (۱/۲۵)

ب $y'=\dfrac{-\frac{۱}{x^{۲}}(۱+\tan^{۲}(\frac{۱}{x}))(\cos x^{۲}-\cos^{۲}x)}{(\cos x^{۲}-\cos^{۲}x)^{۲}}$

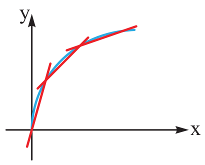
$-\dfrac{(-۲x\sin x^{۲}+۲\cos x\sin x)\tan(\frac{۱}{x})}{(\cos x^{۲}-\cos^{۲}x)^{۲}}$ (۱/۲۵)

۱۰. $g'(x)=(۲x+۱)f'(x^{۲}+x+۱)$ (۰/۵)

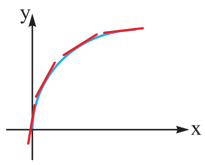
$\Rightarrow g'(-۲)=-۳f'(۳)=-۳\times(-\frac{۵}{۳})=۵$ (۰/۲۵)

۱۱. گزینهٔ «۱» (۰/۲۵)

با افزایش x آهنگ تغییر متوسط مثبت و نزولی است. (شیب خطوط قاطع کم می‌شود.) (۰/۵)



با افزایش x، آهنگ تغییر لحظه‌ای مثبت و نزولی است. (شیب خطوط مماس کم می‌شود.) (۰/۵)



۱۲. $f'(x)=۳x^{۲}-۲ax$ (۰/۲۵) , نقطهٔ عطف $x=۲$ (۰/۲۵)

$f''(x)=۶x-۲a$ (۰/۲۵) , $۱۲-۲a=۰\Rightarrow a=۶$ (۰/۲۵)

$f(۲)=-۱۵\Rightarrow -۱۵=۸-۲۴+b\Rightarrow b=۱$ (۰/۲۵)

$f'(x)=۳x^{۲}-۱۲x=۰\Rightarrow x=۰\ ,\ x=۴$

	۰		۴	
f'	+	−		+
f	↗	↘		↗
	۱		-۳۱	
	max		min	

(۰/۵)

$(۰,۱)$ ماکزیمم نسبی (۰/۲۵)

$(۴,-۳۱)$ مینیمم نسبی (۰/۲۵)

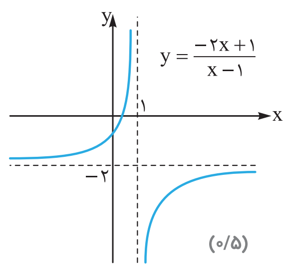
۱۳. مجانب قائم $x=۱$ (۰/۲۵) , مجانب افقی $y=-۲$ (۰/۲۵)

$y'=\dfrac{-۲(x-۱)-۱(-۲x+۱)}{(x-۱)^{۲}}=\dfrac{۱}{(x-۱)^{۲}}>۰$ (۰/۲۵)

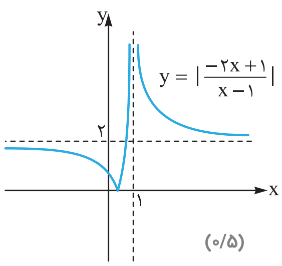
$y''=\dfrac{۰(x-۱)^{۲}-۲(x-۱)۱}{(x-۱)^{۴}}=\dfrac{-۲}{(x-۱)^{۳}}$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y''		+ (∪)	‖	− (∩)	
y	-۲	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-۲

(۰/۵)



(۰/۵)



(۰/۵)